DIBUJO TÉCNICO II
2º de Bachillerato

Ricardo Moreno Luquero

Luis Sánchez Izquierdo

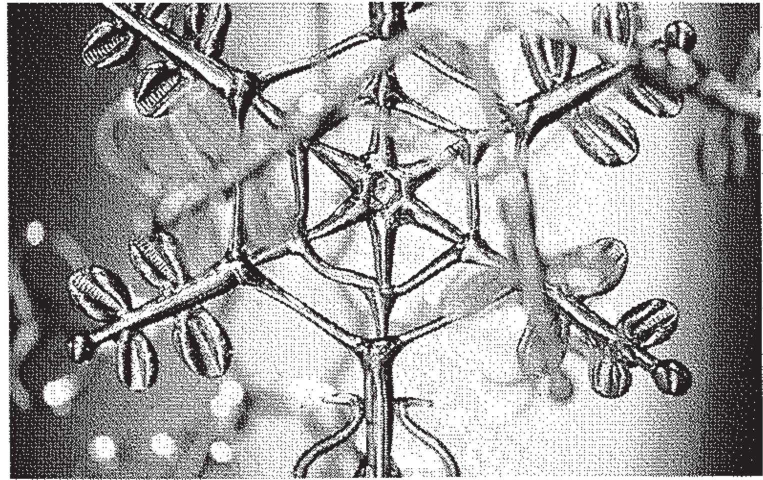
ÍNDICE

TEMA 1 TRAZADOS EN EL PLANO 5
1. Ángulos en la circunferencia 5
2. Arco capaz 6
3. Cuadrilátero inscribible 7
Ejercicios propuestos 8
TEMA 2 PROPORCIONALIDAD, SEMEJANZA Y EQUIVALENCIA 11
1. Semejanza 11
2. Segmento media proporcional entre otros dos dados a, b 12
3. Aplicación del concepto de media proporcional. Teoremas de la altura y del cateto 13
4. Sección áurea 13
5. Figuras planas equivalentes 14
6. Determinación geométrica del cuadrado equivalente a un polígono dado 15
7. Polígono regular equivalente a una figura dada 15
Ejercicios propuestos 18
TEMA 3 POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA 21
1. Potencia de un punto 21
2. Eje radical de dos circunferencias 22
3. Centro radical de tres circunferencias 23
Ejercicios propuestos 24
TEMA 4 FORMAS POLIGONALES 27
1. Triángulo 27
2. Construcción de triángulos 28
3. Cuadrado 31
4. Pentágono regular 31
5. Hexágono regular 32
6. Construcción del polígono regular de n lados 32
7. Construcción de un polígono regular a partir de la apotema 34
8. Polígonos regulares estrellados 34
Ejercicios propuestos 36
TEMA 5 TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS 39
1. Transformaciones geométricas 39
2. Giro 40
3. Traslación 40
4. Simetría 41
5. Homotecia 41
6. Inversión 42
7. Aplicación de las transformaciones a la resolución de problemas geométricos 45
Ejercicio propuestos 47
TEMA 6 HOMOLOGÍA 55
1. Perspectividad entre dos planos 55
2. Homología plana 55
3. Rectas límite L y L' 56
4. Afinidad 57
5. Homotecia 57
Ejercicios propuestos 59
TEMA 7 TANGENCIAS EN EL PLANO 61
1. Rectas tangentes a dos circunferencias 61
2. Trazado de una circunferencia tangente a dos rectas 61
3. Trazado de circunferencias a partir de tres datos: problemas de Apolonio 63
4. Otros casos de tangencias 65
Ejercicios propuestos 67
TEMA 8 CURVAS TÉCNICAS 73
1. Curvas cíclicas 73
4. Envolvente 75
5. Evolvente 76
6. Espirales. Voluta 76
7. Lemniscata de Bernouilli 77
Ejercicios propuestos 79
TEMA 9 CURVAS CÓNICAS 81
1. Curvas cónicas 81
2. Elipse 81
3. Hipérbola 83
4. Parábola 84
5. Tangente a una cónica en un punto 84
6. Circunferencias focal y principal 85
7. Intersección de una cónica con una recta 86
8. Tangente a las cónicas desde un punto exterior 87
Ejercicios propuestos 89

TEMA 10 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN 95
1. Representación de un objeto 95
2. Aplicaciones y ventajas de los sistemas de representación 96
TEMA 11 SISTEMA DIÉDRICO I 97
1. Introducción 97
2. Representación del punto 97
3. La recta 98
4. El plano 100
5. Rectas del plano 101
6. Intersección de planos 103
7. Intersección de recta y plano 104
8. Planos proyectantes 105
9. Paralelismo y perpendicularidad 105
10. Distancia entre dos puntos 107
11. Desarrollo de una pirámide 108
Ejercicios propuestos 109
TEMA 12 SISTEMA DIÉDRICO II 117
1. Abatimientos de planos 117
2. Ángulos 119
3. Vista lateral 122
4. Planos bisectores 123
5. Plano perpendicular a otro 124
6. Recta perpendicular a otra, desde un punto dado 125
7. Mínima distancia entre dos rectas 125
8. Cambios de planos coordenados 127
9. Giros 128
Ejercicios propuestos 131
TEMA 13 SUPERFICIES 141
1. Superficies en el espacio 141
2. Poliedros 143
3. Secciones principales 143
4. Tetraedro 144
5. Hexaedro o cubo 144
6. Octaedro 145
7. La esfera 145
8. Esferas y poliedros regulares 146
9. Superficie cónica 147
Ejercicios propuestos 149
TEMA 14 PERSPECTIVA CABALLERA 157
1. Definición y elementos 157
2. Representación del punto 158
3. Representación de la recta 158
4. Representación del plano 159
5. Relación con el sistema diédrico 160
6. Representación de cuerpos 160
7. Cortes de cuerpos con un plano 161
Ejercicios propuestos 162
TEMA 15 PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA 165
1. Definición y elementos 165
2. Tipos de axonometría ortogonal 165
3. Coeficiente de reducción en isométrica 166
4. Graduación gráfica de los ejes 166
5. Dibujo de circunferencias en isométrica 167
6. Relación con el sistema diédrico 167
Ejercicios propuestos 165
TEMA 16 SISTEMA CÓNICO DE PERSPECTIVA LINEAL 171
1. Punto de fuga de una dirección horizontal 172
2. Construcción práctica de una perspectiva cónica 172
3. Variación de los elementos 173
4. Perspectiva cónica central 175
5. Teorema de Tales en cónica 176
Ejercicios propuestos 178
TEMA 17 NORMALIZACIÓN Y ACOTACIÓN 183
1. Normas 183
2. Normas une sobre los formatos de papel en dibujo técnico 183
3. Normas sobre acotación 184
4. Representación normalizada de un objeto por sus vistas 186
5. Secciones y cortes 186
6. Algunas simplificaciones 187
Ejercicios propuestos 191

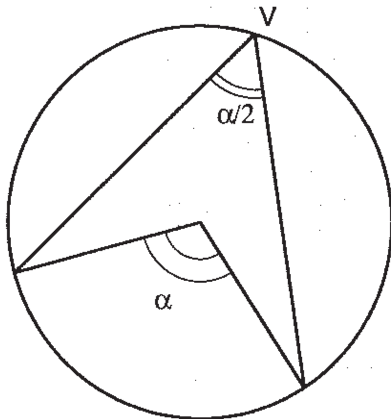
TEMA 1

TRAZADOS EN EL PLANO



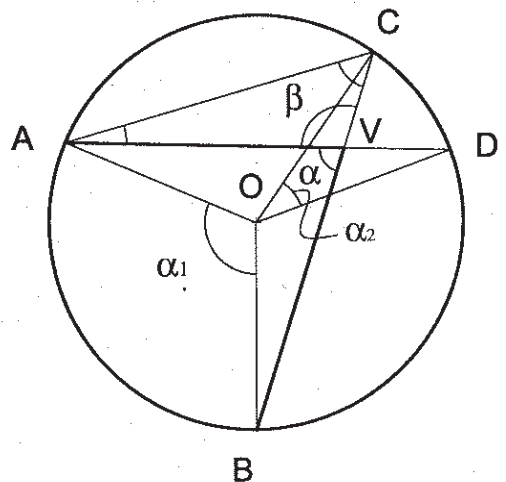
1. ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Recordemos del curso anterior que ángulo inscrito es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma. El ángulo inscrito tiene como valor la mitad del ángulo central correspondiente.



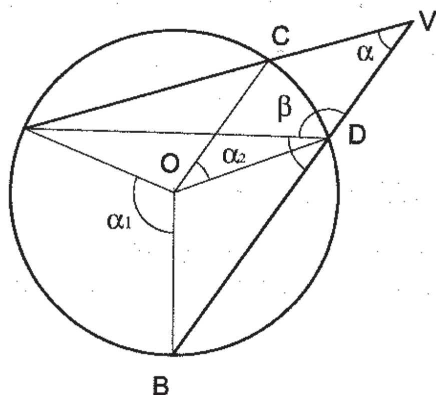
Llamamos ángulo interior a aquel cuyo vértice es interior a la circunferencia. Su valor es la semisuma de los ángulos centrales correspondientes a los arcos delimitados por los lados y sus prolongaciones.

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$



Ángulo exterior es aquel cuyo el vértice es exterior a la circunferencia. Su valor es la semidiferencia de los ángulos centrales abarcados.

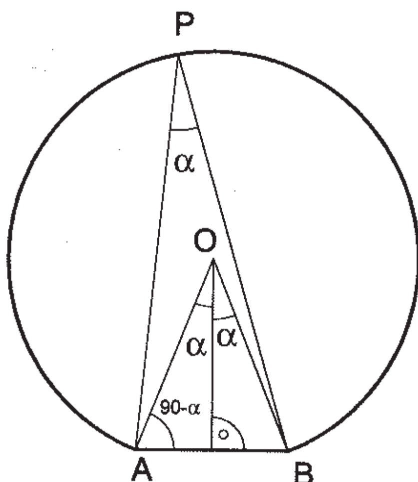
$$\alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

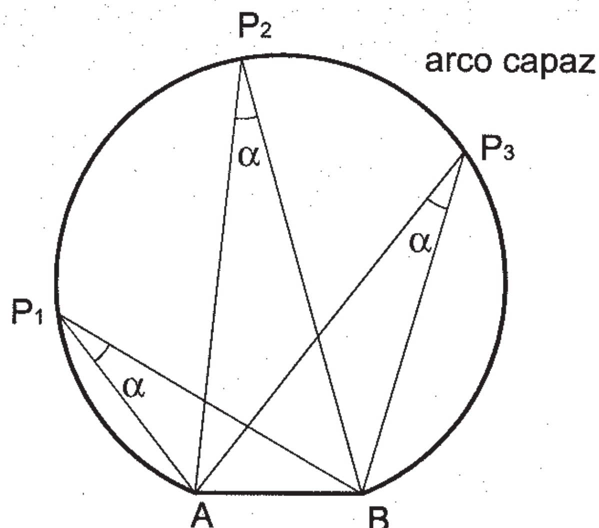


2. ARCO CAPAZ

Esto nos lleva a un concepto importante en geometría. Se llama arco capaz de un ángulo α para un segmento AB dado, al lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ven los extremos del segmento bajo dicho ángulo.

El arco capaz siempre es un arco de circunferencia que pasa por los extremos del segmento, ya que si unimos cualquier punto de esa circunferencia con los extremos del segmento, se forma un ángulo inscrito, cuyo valor es siempre el mismo, independientemente del punto que cojamos en la circunferencia. Para hallar el centro del arco capaz se traza la mediatriz del segmento y por uno de los extremos del segmento (A) se dibuja una línea que forme un ángulo de (90° - α) con AB. El punto de corte es el centro del arco, ya que el ángulo central en O es 2α y, por tanto, el ángulo en P es la mitad, es decir, α, al ser un ángulo inscrito en una circunferencia.

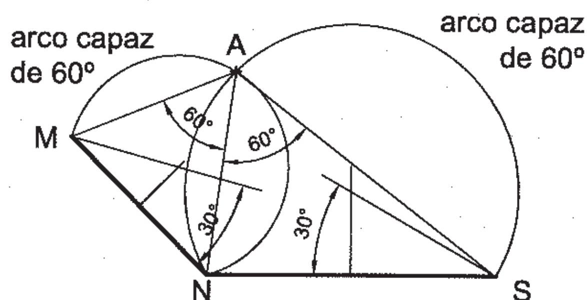




Siempre hay dos arcos simétricos respecto al segmento AB que cumplen la definición, uno por arriba y otro por abajo.

EJERCICIO RESUELTO 1

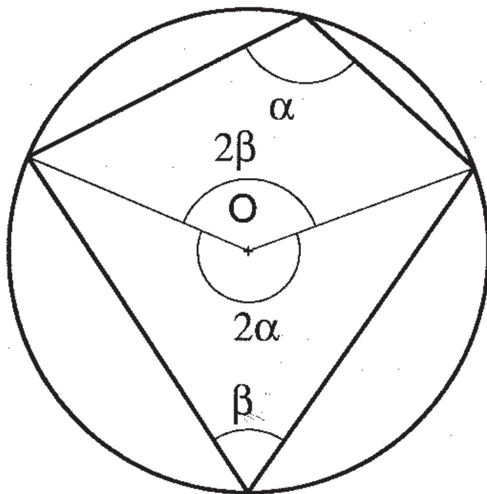
Hallar lo puntos desde lo que se ven cada uno de los dos segmentos dados bajo un ángulo de 60°.



Según la definición de arco capaz, los puntos pedidos estarán en el arco capaz de 60° de cada segmento. Por tanto, basta dibujarlos (hay dos simétricos por cada segmento) y la solución será su intersección, el punto A.

3. CUADRILÁTERO INSCRIBIBLE

Cuadrilátero inscribible es un cuadrilátero que tiene los cuatro vértices sobre una circunferencia Como todo cuadrilátero, los ángulos interiores suman 360°. Pero en este caso, los cuatro ángulos son inscritos, y por lo tanto miden la mitad de su ángulo central correspondiente.



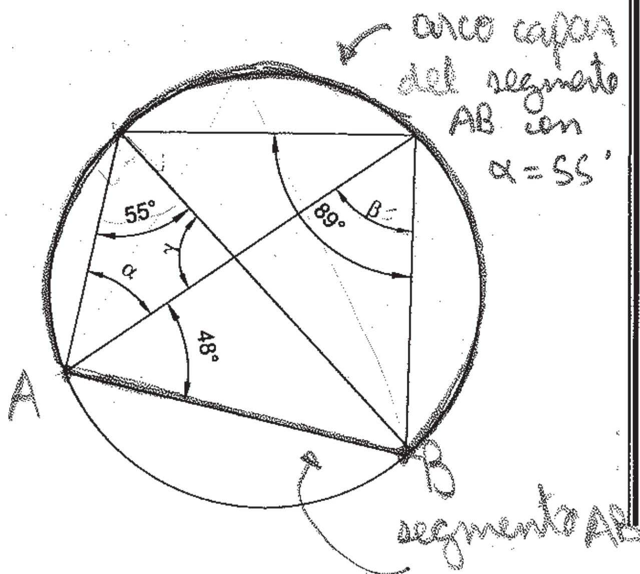
Si nos fijamos en dos ángulos opuestos, α y β, la suma de los dos centrales es 360°.

Por tanto 2α + 2β= 360° => $\boxed{\alpha + \beta = 180°}$.

Eso les distingue de los otros polígonos de cuatro lados. Por tanto, para que un cuadrilátero se pueda inscribir en una circunferencia, debe cumplir que **la suma de los ángulos opuestos sea 180°.**

EJERCICIO RESUELTO 2

Deducir razonadamente el valor de los ángulos α,β y γ, a partir de los datos que se indican.



Por la condición de cuadrilátero inscribible, se cumple que

$$\alpha + 48° + 89° = 180°$$

$$\alpha = 43°$$

Por la condición de arco capaz, el ángulo β y el de 55° deben ser el mismo.

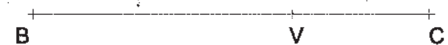
Y para hallar γ, basta sumar los ángulos del triángulo en el que está, cuya suma es 180° como la de todo triángulo:

$$43° + 55° + \gamma = 180°$$

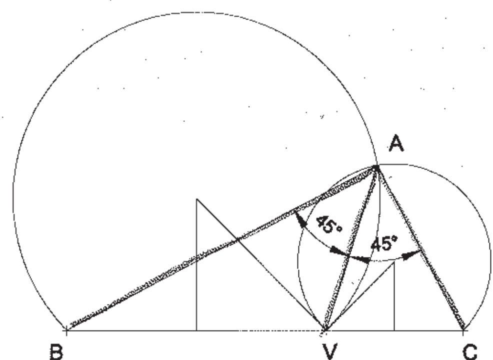
$$\gamma = 82°$$

EJERCICIO RESUELTO 3

Dibujar el triángulo rectángulo ABC del que se conoce la hipotenusa BC y el punto V por el que pasa la bisectriz V_A.



El vértice A es recto. La bisectriz V_A divide el ángulo en dos ángulos iguales, es decir, de 45°. Por tanto A estará en el arco capaz de 45° de los dos segmentos BV y VC.



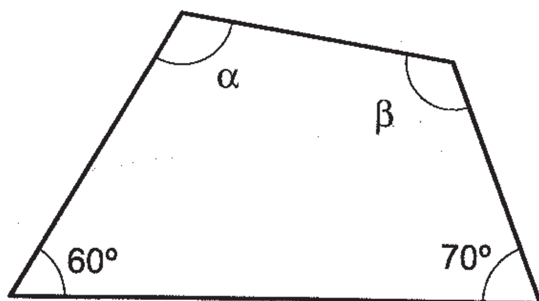
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dibujar el conjunto de puntos desde los que se ven a un segmento de 3 cm bajo un ángulo de 70°.

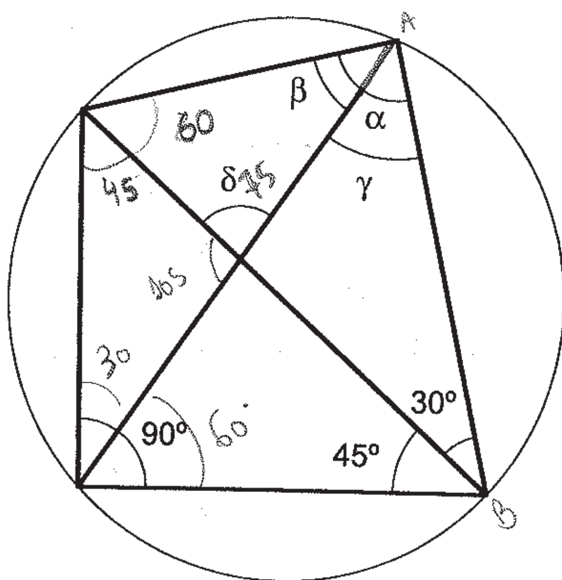
2. Construir un triángulo conociendo la longitud de un lado 6 cm, el ángulo opuesto 60° y que la altura desde ese vértice es 4 cm.

3. Construir un triángulo conociendo la longitud de un lado 5'5 cm, el ángulo opuesto 45°, y la longitud 6 cm de la mediana que llega al lado dado.

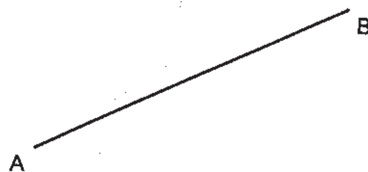
4. ¿Cuánto han de valer los ángulos α y β para que el cuadrilátero ABCD sea inscribible en una circunferencia?



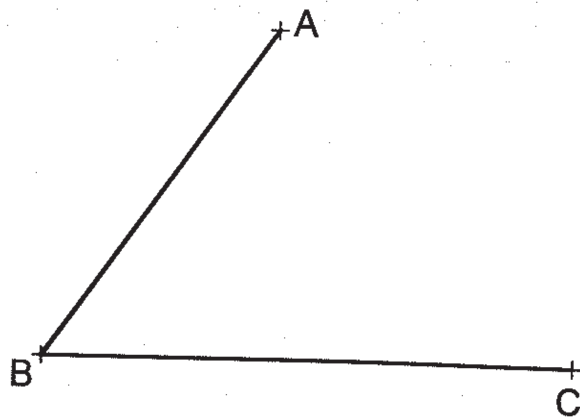
5. A la vista de la figura adjunta y teniendo en cuenta los valores acotados en los ángulos, deducir razonablemente y en este orden los valores de los ángulos α, β, γ y δ.



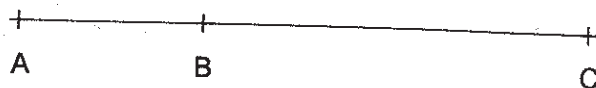
6. Dibujar un cuadrilátero inscribible ABCD del que se da en posición y magnitud el lado AB. Se conocen además los lados BC = 60 mm, AD =45 mm y el ángulo A= 120°.



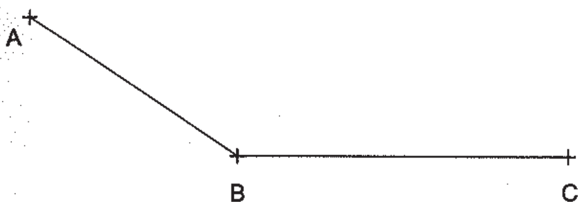
7. Los puntos A, B y C son tres vértices del cuadrilátero convexo ABCD inscrito en una circunferencia. Dibujar dicho cuadrilátero sabiendo que el lado CD mide 40 mm.



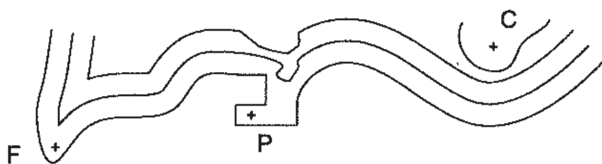
8. Hallar los punto del plano desde los que se ven bajo un ángulo de 45° los segmentos AB y BC.



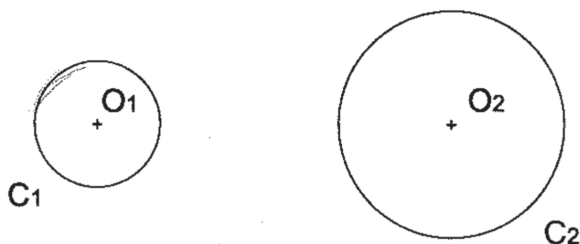
9. Los segmentos AB y BC son lados de dos triángulos que tienen un lado común BD. Dibujar ambos triángulos sabiendo que los ángulos ABD y BDC valen 30°.



10. Desde un navío se divisan los faros F y P formando un ángulo de 60° y las posiciones del faro P y la colina C formando un ángulo de 45°; ambas mediciones se realizan en un plano horizontal. Determinar la posición del navío.

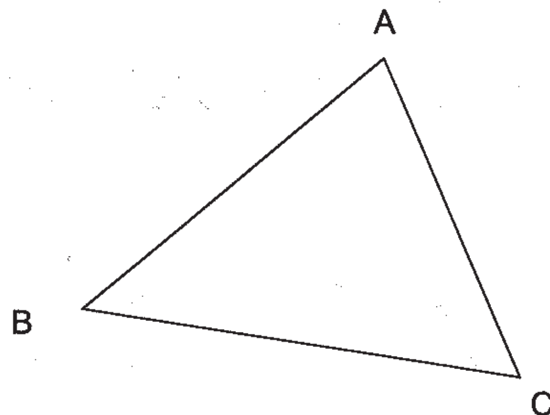


11. Dadas las circunferencias C_1 y C_2 hallar los puntos del plano desde los que se ve a C_1 bajo un ángulo de 60° y a C_2 bajo un ángulo de 90°. Se recuerda que un punto ve a una circunferencia bajo un ángulo α cuando las tangentes trazadas desde el punto a la circunferencia forman un ángulo de valor α.



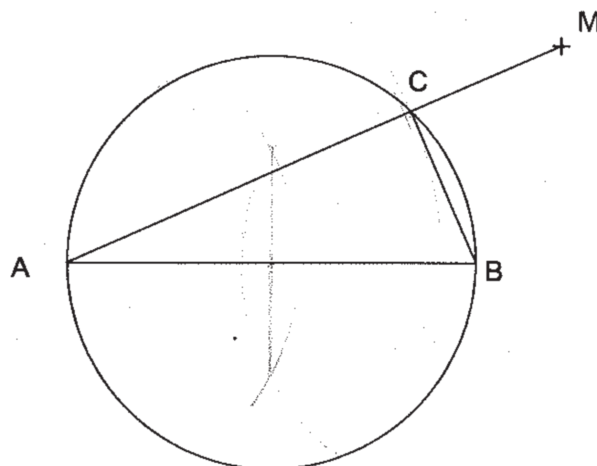
12. Dibujar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 80 mm, y la altura sobre ella sea de 35 mm.

13. Dado el triángulo ABC, hallar un punto de su interior desde el cual se vean los tres lados bajo el mismo ángulo.

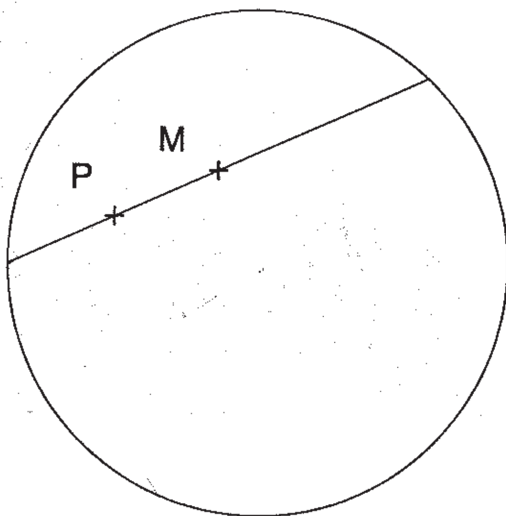


14. Construir un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia de modos que AB= 20, BD= 60 y AD = 50 mm, siendo BC=CD.

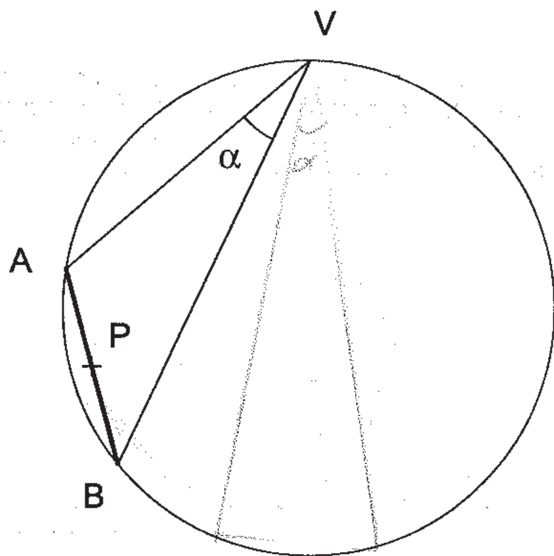
15. Sea AB el diámetro de una circunferencia. Tracemos una cuerda arbitraria AC que sale de A. Prolonguémosla una cantidad CM=CB. Hallar el lugar geométrico del punto M.



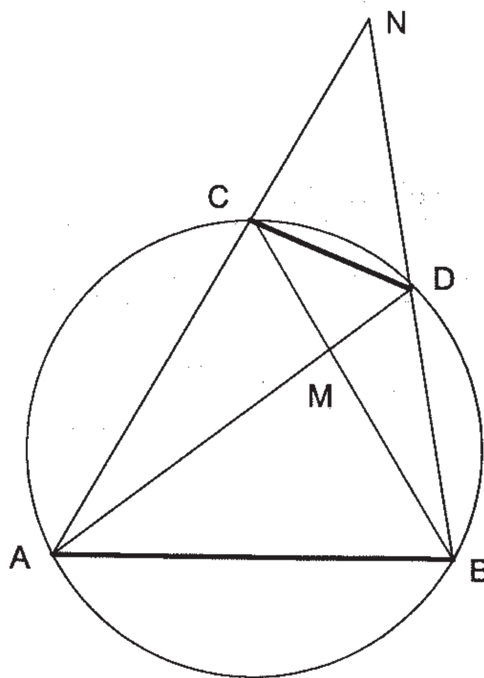
16. Dado un punto P en el plano de un círculo, ¿Cuál es el lugar geométrico del punto medio M de las cuerdas que pasan por P?



17. Un ángulo constante α pivota alrededor de su vértice V que está en una circunferencia fija. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios P de las cuerdas AB que sus lados interceptan en la circunferencia?



18. Los puntos A y B son dos puntos fijos de una circunferencia y CD es una cuerda de longitud constante que ocupa todos las posiciones posibles en la circunferencia. Hallar los lugares geométricos de los puntos M y N.



TEMA 2

PROPORCIONALIDAD, SEMEJANZA Y EQUIVALENCIA

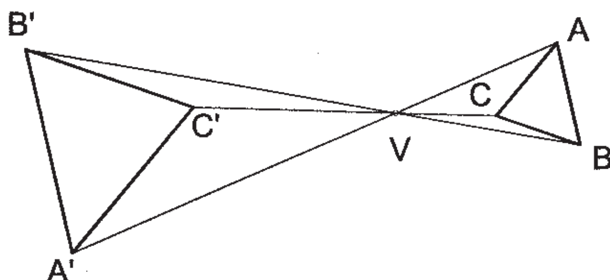


1. SEMEJANZA

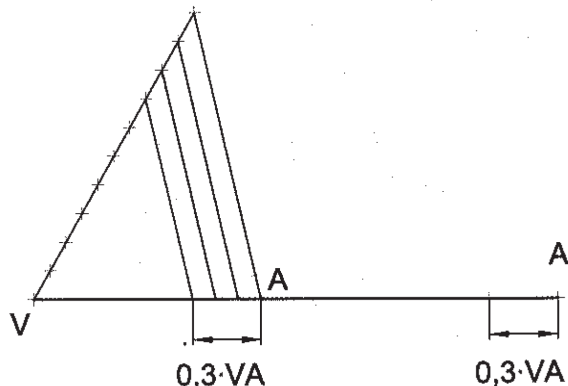
Dos figuras son semejantes cuando las longitudes de sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales.

Si la razón de proporcionalidad de sus lados es k, la razón de proporcionalidad de sus áreas es k^2, y la de sus volúmenes, k^3.

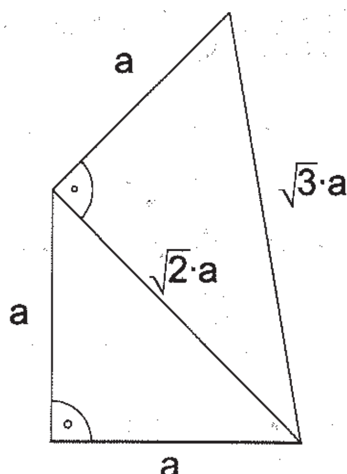
La constante K puede ser negativa. Esos significa que el punto A' está al otro lado del punto V. Por ejemplo si K=-2, la figura semejante del triángulo ABC sería el A'B'C'.



Si el factor fuese por ejemplo 2'3, la distancia a = VA se llevaría desde V dos veces, más 0'3 veces. Para obtener esta última medida, hay que dividir por Tales VA en 10 partes iguales y coger 3. Así obtendríamos VA' = 2'3·VA



Si lo que se quiere es multiplicar un segmento a por $\sqrt{2}, \sqrt{3}...$, lo mejor es usar el Teorema de Pitágoras:



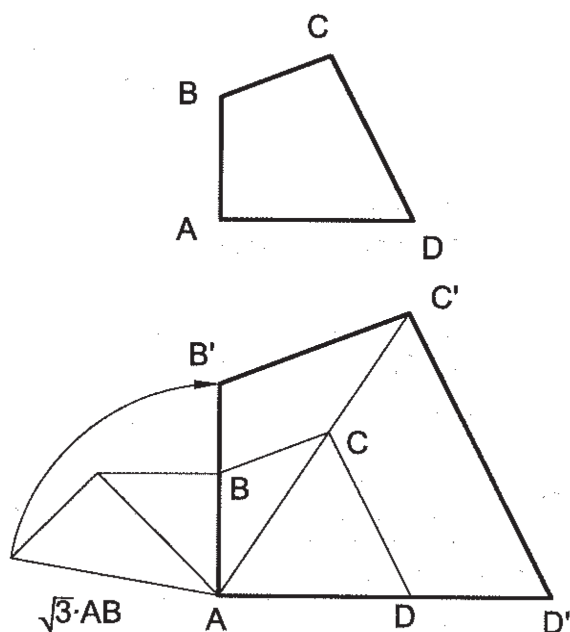
EJERCICIO RESUELTO 1

Dibujar una figura semejante a la dada, de área tres veces mayor.

Como la relación de áreas es k^2 y su valor es 3, la relación de los longitudes de los lados será $k = \sqrt{3} = 1,73$.
Para dibujar la nueva figura, partimos del punto A. Lo unimos con los demás vértices B, C y D. Sobre AB señalamos el punto B', que cumple:

$$\frac{AB'}{AB} = \sqrt{3}$$
$$AB' = \sqrt{3}AB$$

A partir de B' trazamos paralelas a cada lado, determinando el resto de los vértices C' y D'.

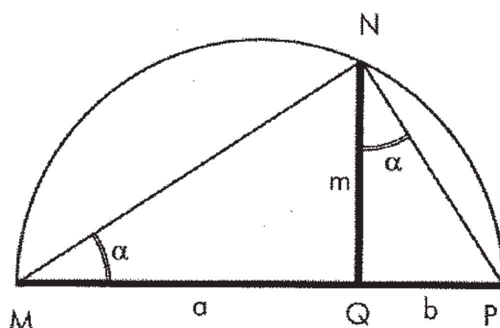


2. SEGMENTO MEDIA PROPORCIONAL ENTRE OTROS DOS DADOS A, B

Un segmento m es media proporcional de otros dos a, b, si cumple que:

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

Para determinar el valor de m se dibuja a y en prolongación b. Se hace el arco capaz de 90° del segmento a+b, y por el punto de unión entre a y b se sube una perpendicular, de valor m.



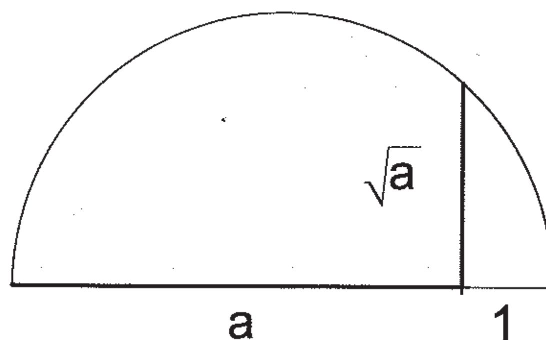
Para demostrarlo basta ver en el dibujo que los dos ángulos α son iguales por tener sus lados perpendiculares dos a dos. Además como los dos ángulos en Q son de 90°, los triángulos rectángulos MQN y NQP son semejantes, por lo que se puede escribir:

$$\frac{b}{m} = \frac{m}{a}$$

EJERCICIO RESUELTO 2

Dado un segmento de longitud a, hallar gráficamente $\sqrt{a}$.

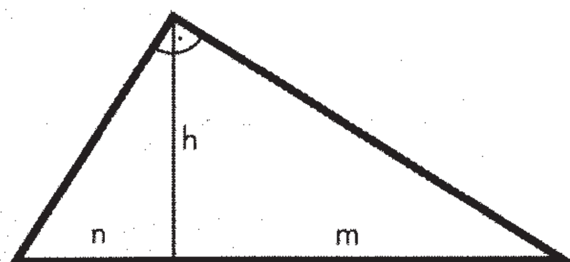
El segmento pedido $l = \sqrt{a}$ cumple que $l^2 = a \cdot 1$, que se puede expresar como $\frac{a}{l} = \frac{l}{1}$. Por tanto el segmento pedido l es media proporcional entre a y 1.



3. APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA PROPORCIONAL. TEOREMAS DE LA ALTURA Y DEL CATETO

El teorema de la altura dice: en un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que la divide. Es una aplicación directa del concepto de media proporcional.

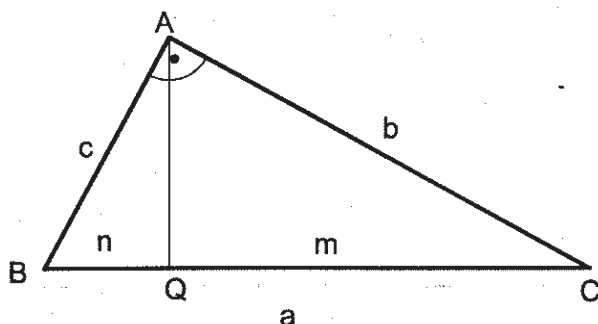
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$



El teorema del cateto dice: en un triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

Para demostrarlo, basta establecer las relaciones de proporcionalidad en los triángulos rectángulos semejantes ABC, AQC y AQB.



4. SECCIÓN ÁUREA

El número áureo Φ es la solución a la ecuación

$$X^2 = X + 1$$

Como es una ecuación de segundo grado, la solución es

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1'61803398874...$$

A ese número, que es irracional y por tanto tiene infinitas cifras decimales, se le llama número áureo, y se le representa por Φ.

Figuras con proporciones áureas han estado presentes con frecuencia en el arte: en las pirámides de Egipto, en la fachada del Partenón, en las catedrales góticas, en muchos cuadros clásicos, etc. Incluso hoy se usa en el diseño de objetos, como en las tarjetas de crédito, en el DNI, en los billetes de banco, en las cajas de cassetes, etc.



Propiedades matemáticas

a) $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = 0'61803398874...$

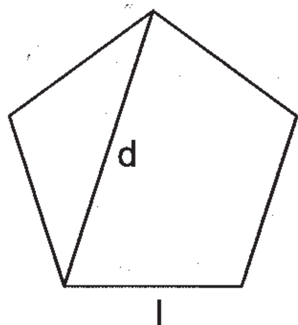
b) $\Phi^2 = \Phi + 1 = 2'61803398874...$

c)
$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \Phi + 1 &&= \Phi + 1 \\
\Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi &&= 2\Phi + 1 \\
\Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 &&= 3\Phi + 2 \\
\Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 &&= 5\Phi + 3 \\
\Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 &&= 8\Phi + 5 \\
\Phi^7 &= \Phi^6 + \Phi^5 &&= 13\Phi + 8 \\
\Phi^8 &= \Phi^7 + \Phi^6 &&= 21\Phi + 13
\end{aligned}$$

d) Los coeficientes de los sumandos que salen en las expresiones anteriores forman la llamada serie de Fibonacci, en la que cualquier término es la suma de los dos anteriores. El cociente entre dos elementos consecutivos de esa serie tiende a Φ, por exceso y por defecto. Esto ocurre incluso en una serie de Fibonacci generalizada, en la que se parte de dos números cualesquiera, y el siguiente es la suma de los dos anteriores.

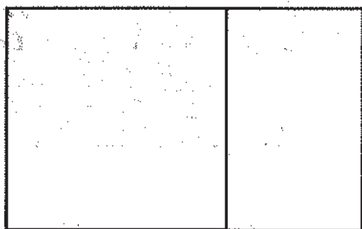
Propiedades geométricas

a) En el pentágono regular, la relación entre la diagonal y el lado es el número áureo.

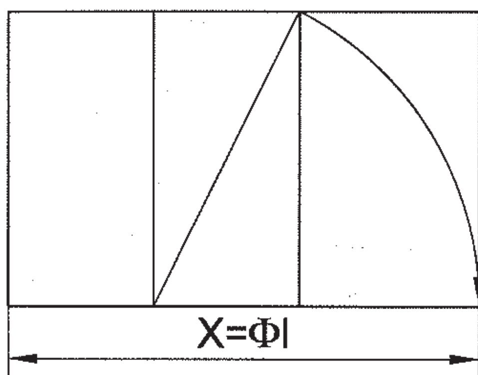


$$\frac{d}{l} = \Phi$$

b) Un rectángulo con los lados en proporción Φ se llama áureo. Si en él se recorta un cuadrado máximo, el rectángulo que queda sigue siendo áureo.



c) Construcción de un segmento áureo de otro dado



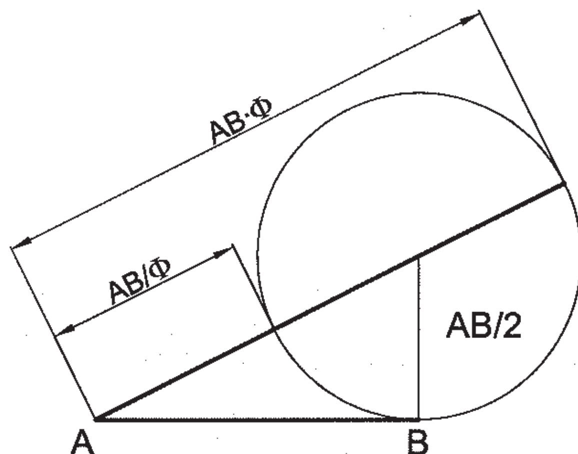
En efecto:

$$X = \frac{1}{2}l + \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + l^2} = \frac{1}{2}l + l\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}l = \Phi l$$

Pitágoras

d) División de un segmento en dos partes que tengan la relación áurea.

Dado un segmento AB, trazamos por A una perpendicular y llevamos la longitud AB/2. Desde su extremo dibujamos la circunferencia de radio AB/2, y unimos A con su centro . Las dos intersecciones de esa recta con la circunferencia dan los segmentos áureo y división áurea del segmento AB. Su demostración es similar a la anterior.



5. FIGURAS PLANAS EQUIVALENTES

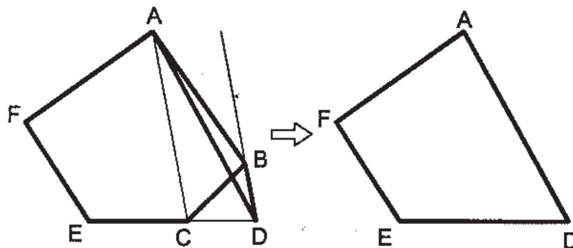
→ MISMO ÁREA

Se dice que dos figuras son equivalentes si tienen igual área.

Si tenemos un polígono de n lados, vamos a ver cómo podemos construir otro equivalente de n- 1 lados.

Sean A, B, C tres vértices consecutivos. Unimos A con C y por B trazamos una paralela a la recta AC, que corta a la prolongación del lado en D.

El triángulo ABC es equivalente al ADC, por tener igual base (AC) e igual altura (distancia entre las dos rectas paralelas). Por tanto, el polígono ADEF tiene igual área que el ABCEF y un lado menos.

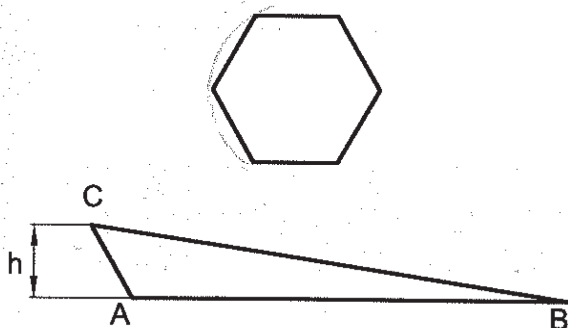


6. DETERMINACIÓN GEOMÉTRICA DEL CUADRADO EQUIVALENTE A UN POLIGONO DADO

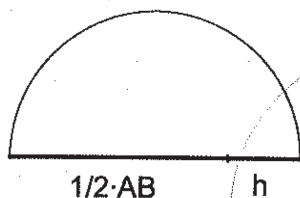
Vamos a verlo con un ejemplo. Hallemos el cuadrado equivalente al siguiente hexágono:



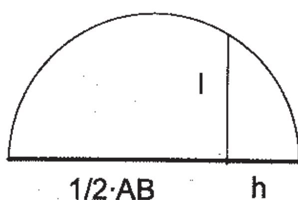
a) Se van quitando vértices, hasta reducir el polígono a un triángulo equivalente ABC, cuya área es ½ AB · h.



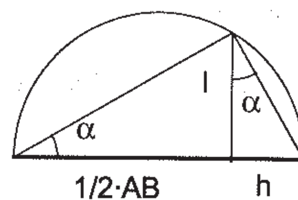
b) Se dibuja el segmento suma de (½AB) y h, así como la semicircunferencia que pasa por sus extremos.



c) Por el punto de separación entre (½AB) y h se traza una vertical que corta a la semicircunferencia en un segmento de longitud l, que es el lado del cuadrado equivalente



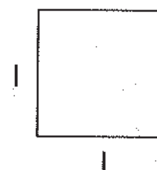
La razón de ello se ve en la siguiente figura:



por semejanza de triángulos $\dfrac{l}{\frac{1}{2}\overline{AB}} = \dfrac{h}{l}$

por lo que $\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = l^2$, que es el área del triángulo ABC equivalente al hexágono dado.

Por último dibujamos el cuadrado equivalente, de lado l:

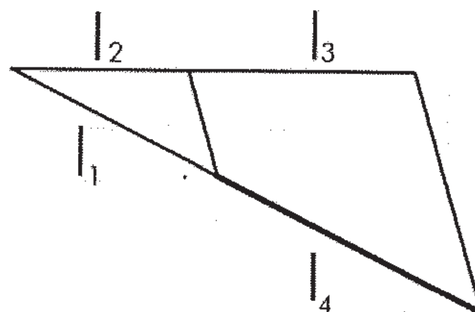


7. POLÍGONO REGULAR EQUIVALENTE A UNA FIGURA DADA

Se parte de un polígono regular auxiliar semejante a la solución, de lado conocido l_1. A partir de él se obtiene el lado l_2 de su cuadrado equivalente. Con la figura dada se obtiene el lado l_3 del cuadrado equivalente. El polígono regular solución tendrá de lado l_4, que será semejante al auxiliar y por lo tanto cumplirá

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_4}$$

que en forma geométrica se halla por el teorema de Tales

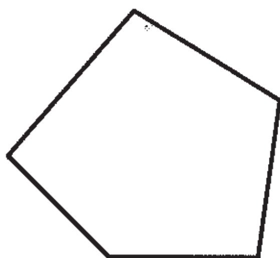


Así podemos obtener un triángulo equilátero equivalente a una figura dada, un pentágono regular, un rectángulo de doble base que altura, etc.

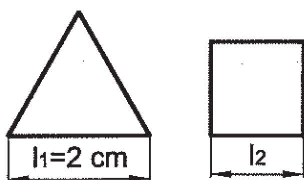
Veámoslo con un ejemplo:

EJERCICIO RESUELTO 3

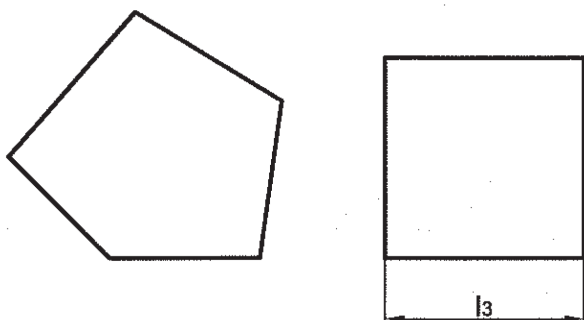
Hallar el triángulo equilátero equivalente al siguiente polígono:



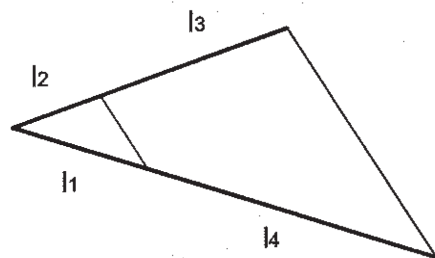
Partimos de un triángulo equilátero auxiliar de lado l_1=2cm, y obtenemos el lado de su cuadrado equivalente l_2



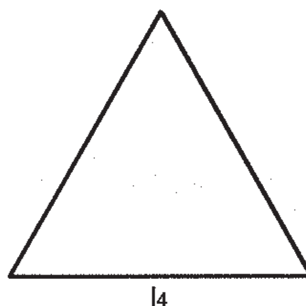
A partir del polígono dado, obtenemos el lado l_3 de su cuadrado equivalente.



Establecemos ahora la siguiente proporción: si l_2 se obtiene a partir de un triángulo equilátero de lado l_1, a l_3 le corresponde un triángulo de lado l_4 :



Por último, con l_4 dibujamos el triángulo equilátero buscado:



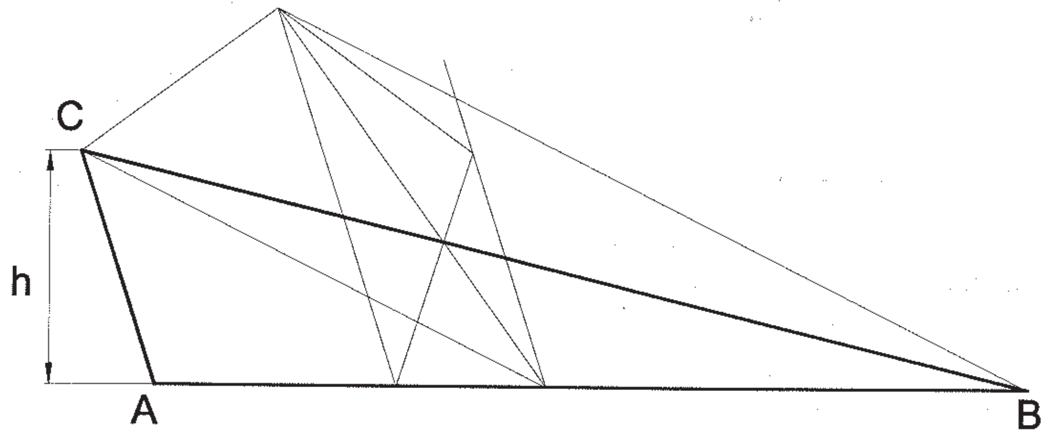
$l_3^2 = l_4 \cdot h \cdot \frac{1}{2} = l_4^2 \cdot \sin(60) \cdot \frac{1}{2} = l_4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad \frac{l_3}{l_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$l_2^2 = l_1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\iff$ $\frac{l_2}{l_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

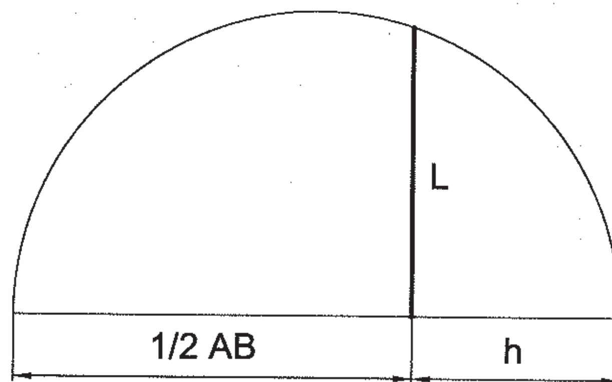
EJERCICIO RESUELTO 4

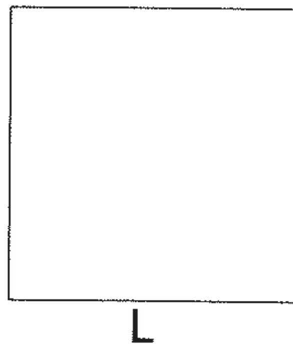
A partir de un pentágono regular de lado 3 cm, construir el cuadrado equivalente.

Reducimos el pentágono a un triángulo equivalente ABC.



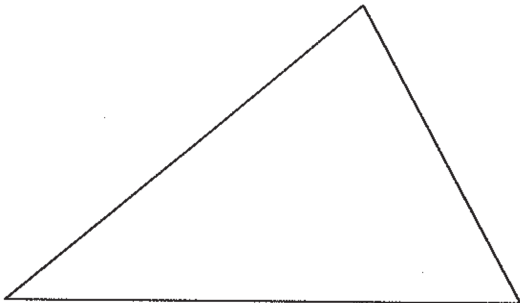
Dibujamos el segmento suma de ½ AB y h; trazamos la semicircunferencia que pasa por sus extremos, y levantamos una perpendicular por el punto de separación entre ½ AB y h. Así hallamos L.





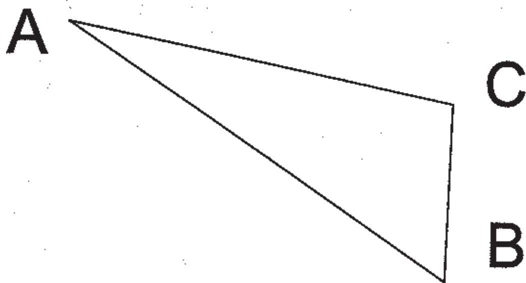
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Inscribir un cuadrado en el triángulo dado.

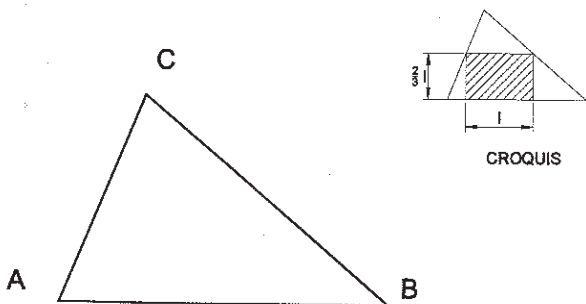


2. Hallar gráficamente el perímetro de un triángulo A'B'C' cuyo lado mayor mide 50 mm, sabiendo además que es semejante a otro triángulo ABC cuyos lados miden a = 35 mm, b = 30 mm y c = 25 mm.

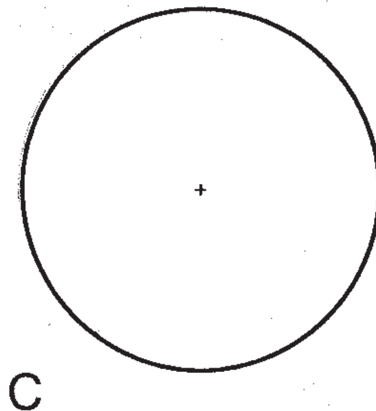
3. Construir un triángulo semejante al ABC y que tenga de perímetro 180 mm.



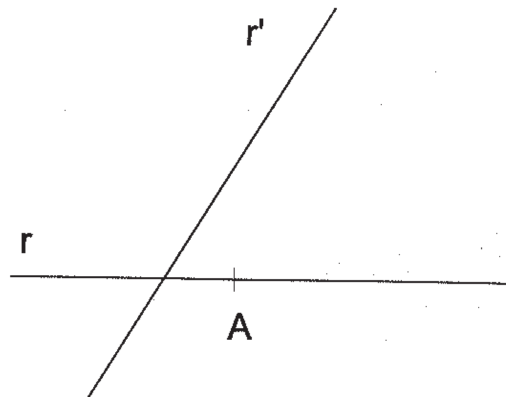
4. Inscribir en el triángulo ABC, en la forma que indica la figura explicativa, un rectángulo en el que un lado es los 2/3 del otro.



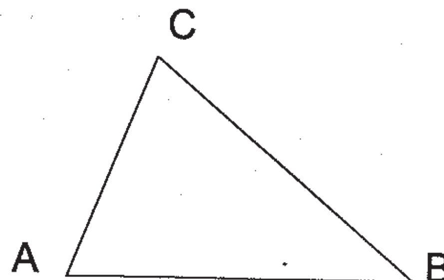
5. Dado la circunferencia C, inscribir en ella un rectángulo que tengo un lado doble del otro.



6. Conocemos las rectas **r**, **r'** y un punto A situado sobre r. Dibujar todos los cuadrados ABCD tales que el lado AB quede contenido en r y el vértice C opuesto al A quede contenido en r'.



7. Los dos herederos de un terreno triangular ABC, que sólo tiene acceso desde la calle del lado AB, deciden dividir en dos partes iguales con un lado paralelo a AC, de forma que ambos tengan acceso desde dicha calle. Determinar las divisiones del terreno.



8. Dividir áureamente un segmento AC = 40 mm.

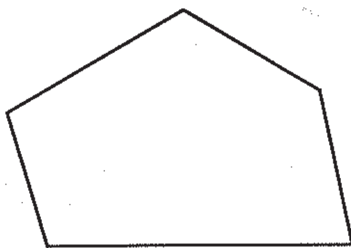
9. Construir un rectángulo áureo conociendo la medida de los dos lados mayores = 60 mm

10. Dado un segmento b = 50 mm, hallar gráficamente los segmentos a y c sabiendo que a es el segmento áureo de b y que b es el segmento áureo de c.

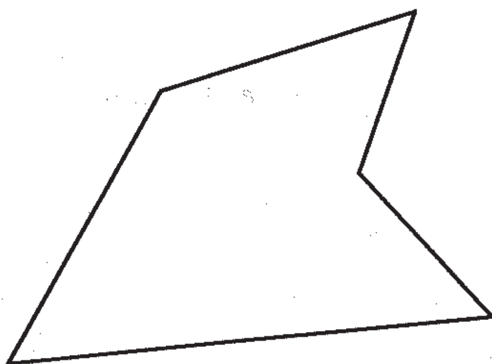
11. Dibujar un triángulo isósceles de perímetro 10 cm y en el que la base es el segmento áureo de uno de sus lados laterales.

12. Dibujar un triángulo isósceles de perímetro 18 cm y cuyos lados iguales sean segmento áureo de la base.

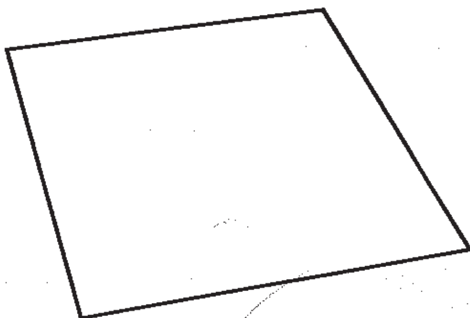
13. Trazar el cuadrado equivalente al polígono dado.



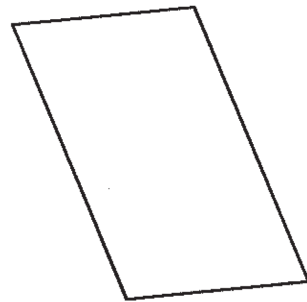
14. Hallar el cuadrado equivalente al polígono dado.



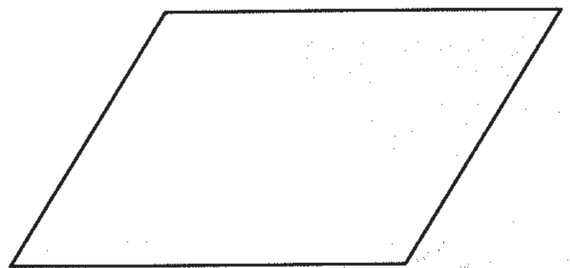
15. Hallar: a) Un triángulo equivalente al cuadrilátero dado. b) Un cuadrado equivalente.



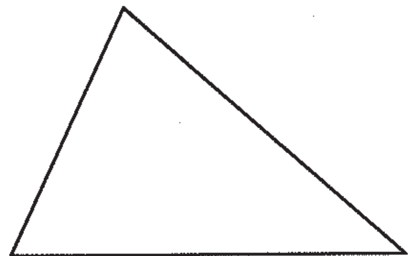
16. Determinar el triángulo equilátero equivalente al paralelogramo dado.



17. Construir un triángulo equilátero equivalente al paralelogramo dado.

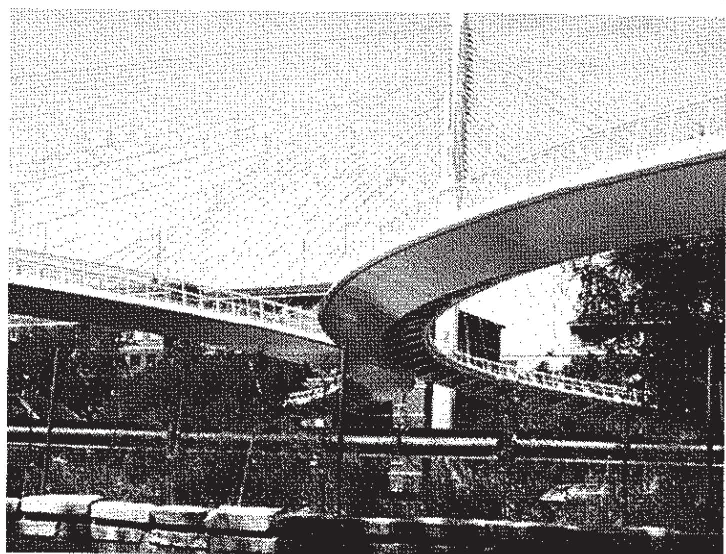


18. Determinar un rectángulo de doble base que altura, equivalente al triángulo dado.



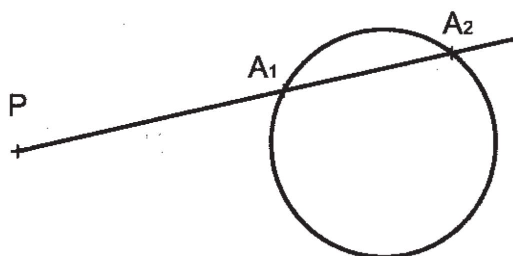
TEMA 3

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA



1. POTENCIA DE UN PUNTO

Se llama potencia de un punto P respecto de una circunferencia al producto de los segmentos determinados por dicho punto y las intersecciones de la circunferencia con una secante cualquiera que pase por P.

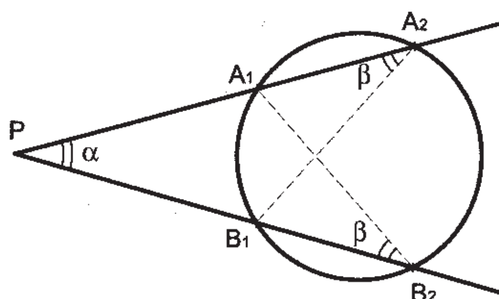


Potencia de $P = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2}$

Propiedad

La potencia de un punto respecto de una circunferencia es independiente de la secante elegida.

En efecto, tracemos dos secantes cualesquiera. Si unimos B_1 con A_2 y A_1 con B_2, obtenemos dos triángulos que son semejantes, por tener dos ángulos iguales (uno α coincidente y otro β inscrito en una circunferencia que abarca el mismo arco), y, por tanto, también es igual el tercero ángulo, que es $180° - (\alpha + \beta)$.



Aplicando la proporcionalidad entre los lados de los triángulos:

$$\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}} = \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PA_1}}$$

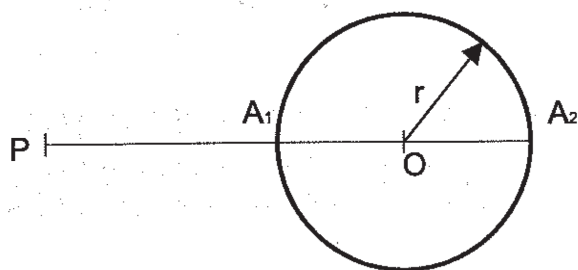
por lo que:

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2}$$

Significado geométrico de la potencia de un punto

Si trazamos la secante que pasa por el centro de la circunferencia, se cumple que

$$Pot.P = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = (\overline{PO} - r) \cdot (\overline{PO} + r) = \overline{PO}^2 - r^2$$



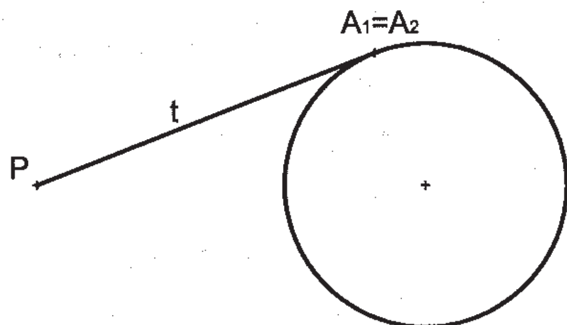
Si P es exterior a la circunferencia, PO > r y la potencia es por tanto positiva.

Si P pertenece a la circunferencia, PO = r y la potencia es cero.

Si P es interior a la circunferencia, PO < r y la potencia es negativa.

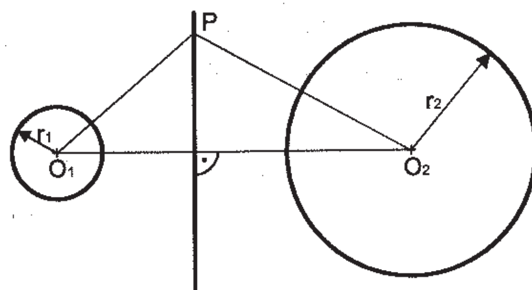
Por otra parte, si trazamos la tangente desde P a la circunferencia de centro 0, los puntos A_1 y A_2, coinciden, por lo que:

$$\boxed{Pot.P = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = t^2}$$

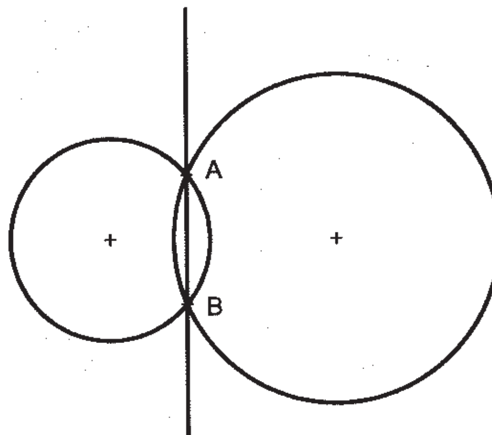


2. EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

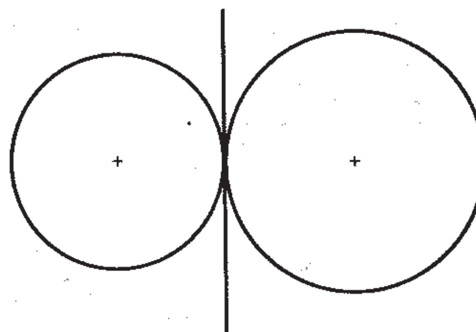
Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia (variable para cada punto) respecto de las dos circunferencias. Es una recta perpendicular a O_1O_2, que en general no pasa por el punto medio de O_1O_2.



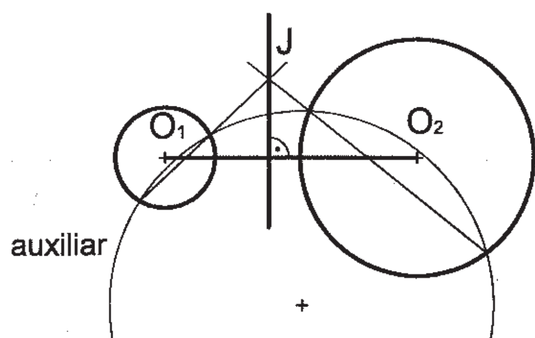
Si las circunferencias son **secantes**, el eje radical es la recta que pasa por los puntos de corte, ya que los puntos A y B tienen igual potencia respecto de ambas, concretamente cero.



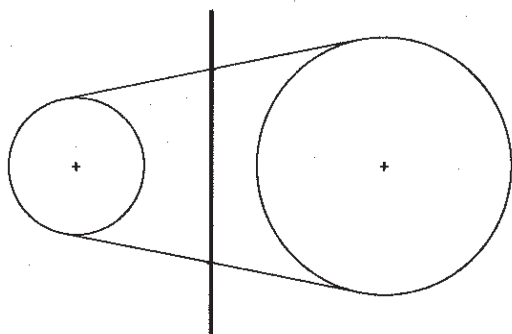
Si las circunferencias son **tangentes**, será la tangente común, por ser un caso límite del anterior.



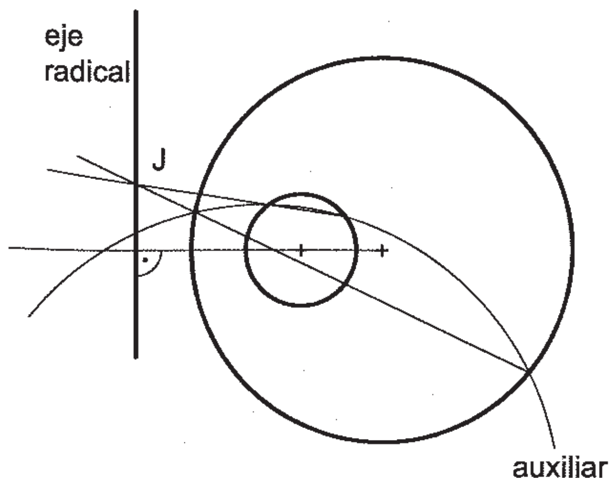
Si las circunferencias son **exteriores**, para hallar el eje radical se traza una circunferencia auxiliar cuyo centro no esté alineado con los otros dos, y que corte a las dos circunferencias. Se hallan los ejes radicales de esta circunferencia auxiliar con las dos dadas. Esos ejes se cortan en un punto J que tiene igual potencia respecto a las dos circunferencias dadas. Por ese punto se trazo una perpendicular a la recta O_1O_2, que es el eje radical buscado.



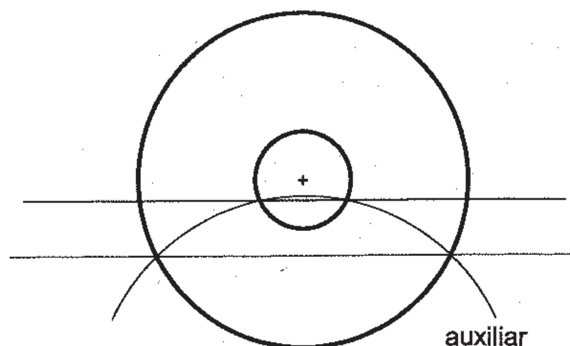
Otro procedimiento es trazar las tangentes comunes a las dos circunferencias y hallar sus puntos medios. El eje radical pasará por esos puntos, ya que, como hemos visto anteriormente, la potencia de esos dos puntos respecto a cualquiera de las dos circunferencias es el cuadrado de esas dos equidistancias.



Si las dos circunferencias son interiores, se hace trazando una circunferencia auxiliar, de la mismo forma que en el caso anterior.

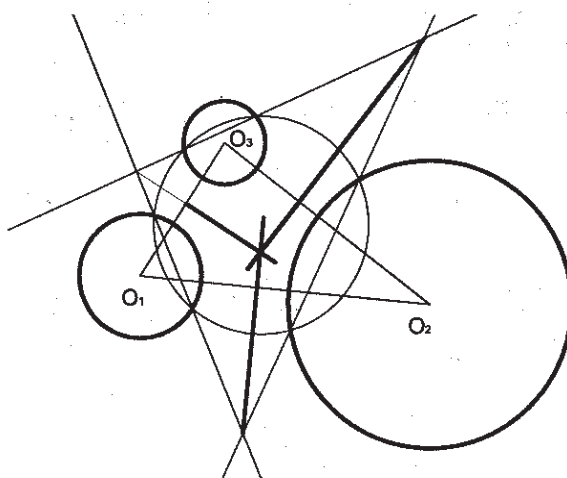


Si son **concéntricas** el eje radical está en el infinito.



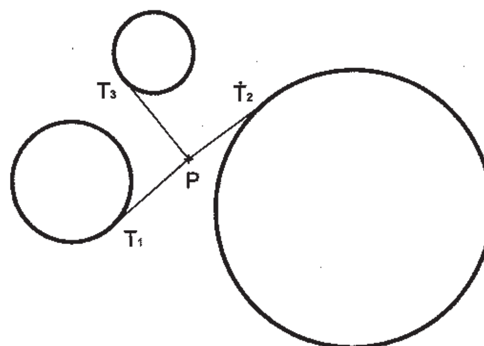
3. CENTRO RADICAL DE TRES CIRCUNFERENCIAS

Es el punto que tiene igual potencia respecto a las tres circunferencias. Será la intersección de los ejes radicales de las circunferencias tomadas dos a dos.



Una consecuencia de esta definición es que desde el centro radical, las tangentes trazadas a las tres circunferencias determinan segmentos iguales:

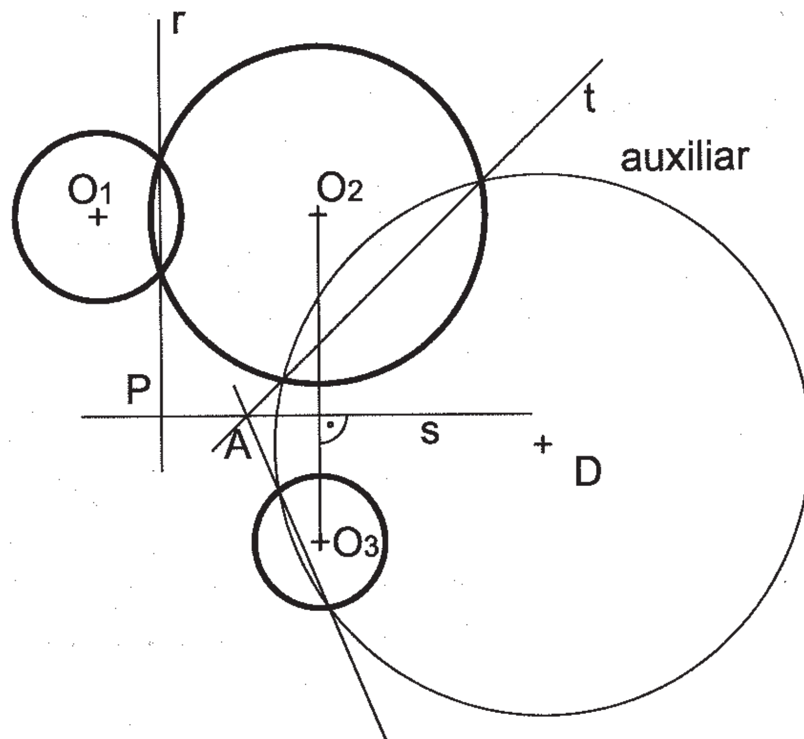
$$\overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \overline{PT_3}$$



EJERCICIO RESUELTO 1

Hallar el centro radical de las tres circunferencias dados, de centros O_1, O_2 y O_3.

El eje radical de las dos circunferencias de centro O_1 y O_2 es la secante común r. Para hallar el eje radical de las circunferencias de radio O_2 y O_3, trazamos una circunferencia auxiliar con centro en un punto cualquiera D. Se hallan los dos ejes radicales auxiliares t y u, que se cortan en A. Por ese punto se trazo una recta s perpendicular a O_2O_3, que es el eje radical. El centro radical es P, intersección de r y s.



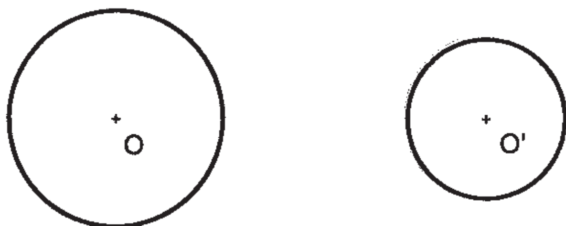
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dibujar el eje radical de dos circunferencias de r = 1 cm y r = 2 cm cuando:

a) los centros están a una distancia de 5 cm.
b) los centros están a una distancia de 1,5 cm.
c) los centros están a una distancia de 0,6 cm.
d) los centros están a una distancia de 1 cm.

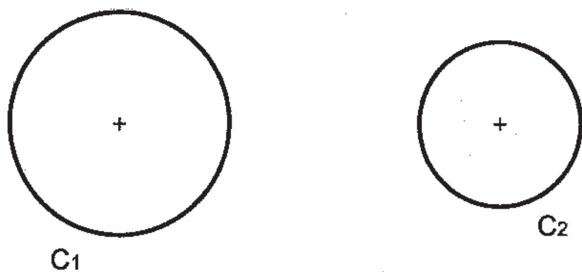
2. Supuesta la superficie de la Tierra lisa y esférica, calcular de forma teórica el radio del horizonte que ve un observador a 2 m de altura. (Radio de la Tierra = 6 400 km).

3. Hallar los puntos del plano que tengan igual potencia respecto a las circunferencias dadas y desde los que se vea el segmento que une sus centros bajo un ángulo de 60°.



4. Dibujar el lugar geométrico de los puntos que tienen 25 cm^2 de potencia respecto de una circunferencia de radio 3 cm.

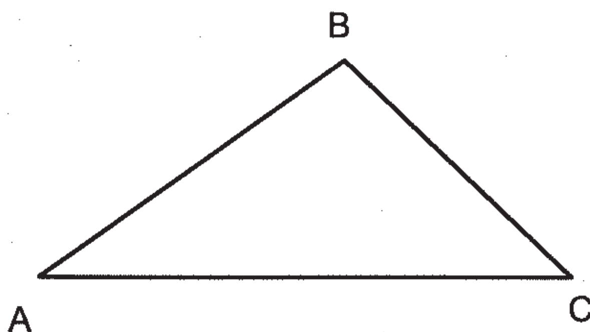
5. Dadas las circunferencias C_1 y C_2 hallar los puntos P del plano desde los que se pueden trazar tangentes a ambas circunferencias, tales que la distancia del punto P al punto de contacto sea 35 mm.



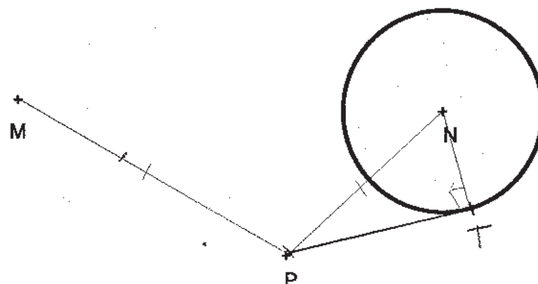
6. Hallar gráficamente un punto P entre M y N tal que $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}$



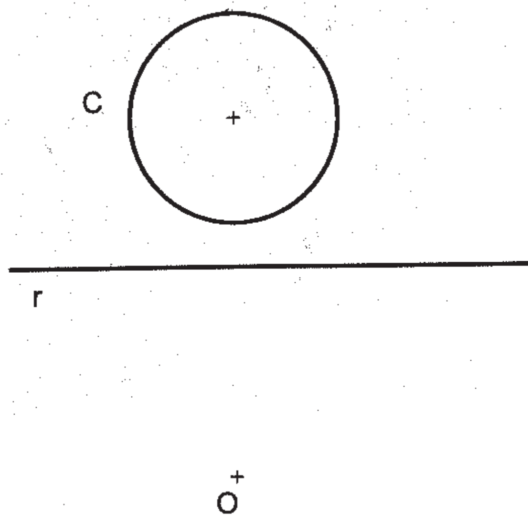
7. Determinar un punto M sobre el lado AC del triángulo, tal que $AB^2 = AM \cdot AC$.



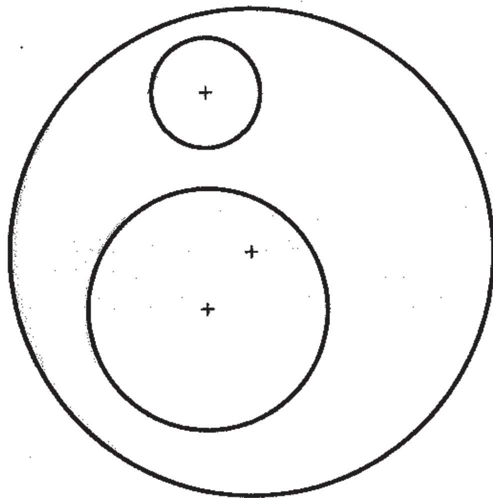
8. Trazar una circunferencia con centro M y tal que P tenga igual potencia respecto de ella y de la (N).



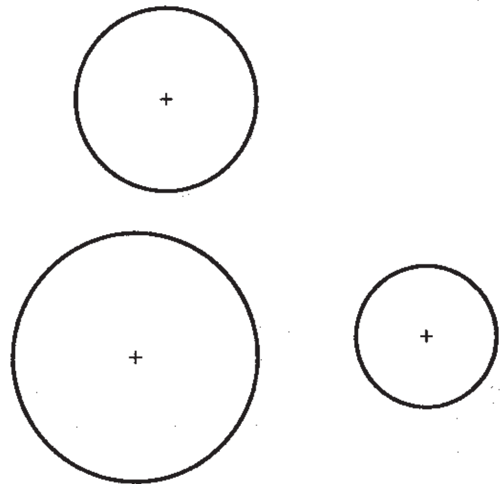
9. Dibujar una circunferencia de centro O de forma que el eje radical de la misma y de la circunferencia dada C sea la recta r.



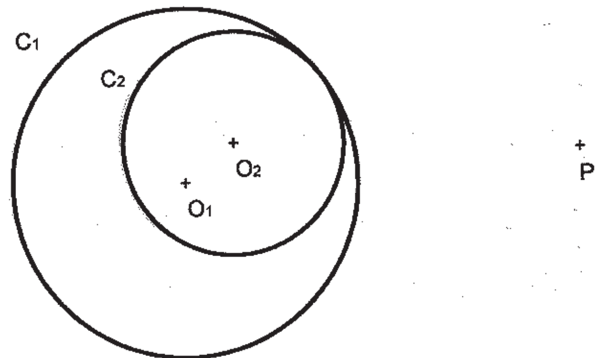
10. Determinar el centro radical de las tres circunferencias.



11. Hallar el punto P desde el cual pueden dibujarse tangentes de igual longitud a las circunferencias dadas. Dibujar las posibles tangentes.



12. Trazar una circunferencia que pase por el punto P y que comparta el mismo eje radical con las circunferencias dadas C_1 y C_2.

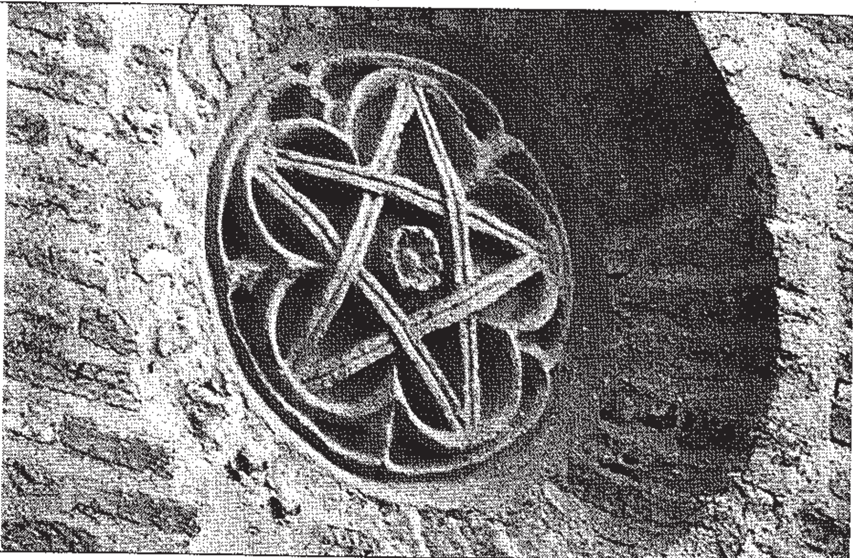


jarse
bujar

ue
C_1

TEMA 4

FORMAS POLIGONALES



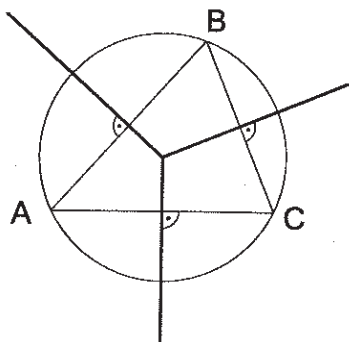
1. TRIÁNGULO

Polígono significa "varios ángulos". Lógicamente no hay polígonos de uno o dos ángulos. El polígono más sencillo es el triángulo, que tiene tres lados y tres ángulos. Estos suman siempre 180°.

Rectas notables en el triángulo

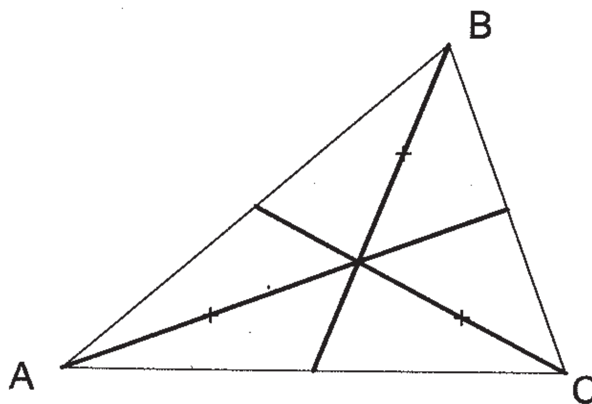
MEDIATRICES

Son las tres rectas perpendiculares a los lados que pasan por sus puntos medios. Se cortan en el *circuncentro*, centro de la circunferencia circunscrita.



MEDIANAS

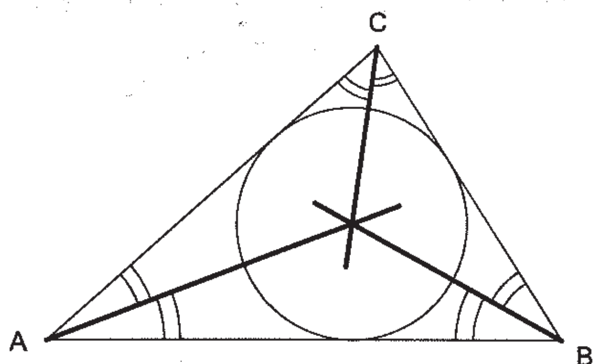
Son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Se cortan en el ***baricentro***, centro de gravedad del triángulo. La distancia, medida a lo largo de la mediana, del baricentro al lado es siempre 1/3 de la longitud total de la mediana.



Todos están alineados.

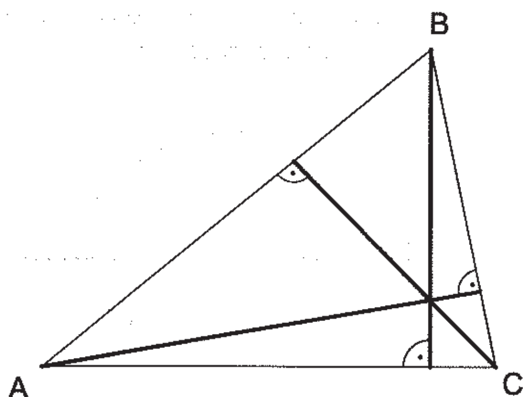
BISECTRICES

Son las rectas que dividen en dos partes iguales a los ángulos. Se cortan en el *incentro*, centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



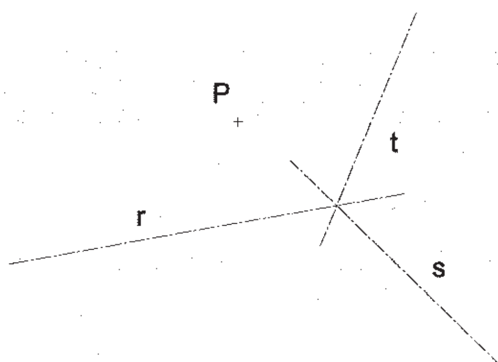
ALTURAS

Son las perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto. Se cortan en el *ortocentro*. Está fuera del triángulo si uno de los ángulos es mayor de 90°.

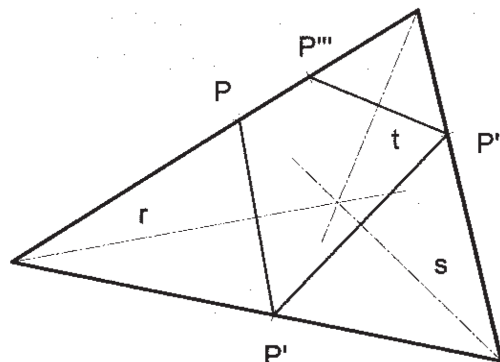


EJERCICIO RESUELTO 1

Determinar un triángulo que tenga las rectas r, s y t como bisectrices y al punto P situado en uno de los lados.



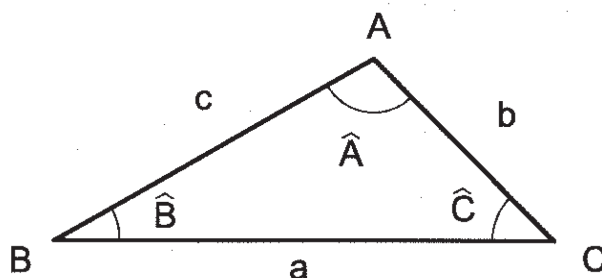
Cada bisectriz es eje de simetría de dos lados del triángulo. Por tanto el punto P', simétrico del P respecto de r, está en un lado. El P'' simétrico de P' respecto de s está en el tercer lado. Y P''', simétrico de P'' respecto de t, está en el mismo lado que P. Basta unir P''' con P y prolongar hasta las bisectrices para obtener un lado. Los otros dos lados pasarán por P' y P''.



2. CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Un triángulo queda definido por tres datos independientes, cogidos entre los tres ángulos, los tres lados, las tres alturas, etc. En algunos casos puede haber varios triángulos que tengan esos tres datos.

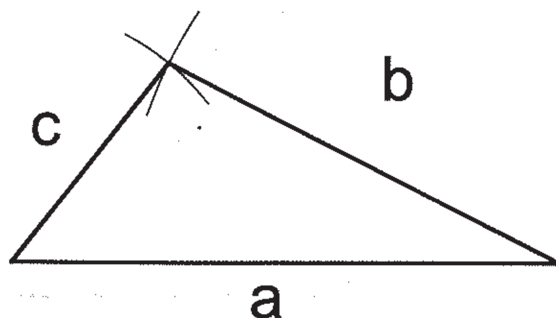
La notación que usaremos es llamar lado **a** al lado opuesto al ángulo Â, mediana m_A la que sale del vértice A y va al lado **a**, h_A la altura, y w_A la longitud de la bisectriz desde A hasta el lado **a**.



Veamos algunos casos, según los datos que nos den:

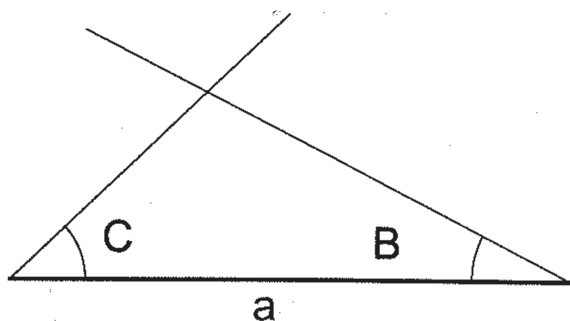
- Dadas las longitudes de los tres lados **a, b, c**

Se dibujo uno de los lados, por ejemplo **a**, y por sus extremos se trazan arcos de radio **b** y **c** que se cortan en el tercer vértice.



- Dados los tres ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Hay infinitos triángulos posibles, todos semejantes. Para dibujar uno de ellos, se fija un lado **a** y, por sus extremos, se dibujan rectas que forman ángulos con este lado de $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

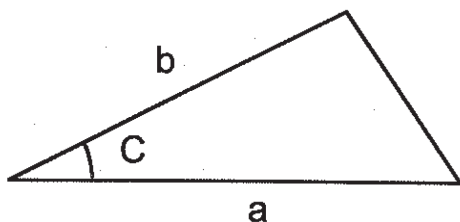


- Dados un lado y dos ángulos.

El tercer ángulo medirá $180^o-(\hat{A}+\hat{B})$. Se procede igual que en el caso anterior.

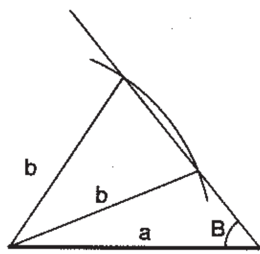
- Dados **a**, **b**, y el ángulo entre ellos $\hat{C}$.

Se dibuja **a**. Por un extremo se traza una recta que forme un ángulo $\hat{C}$ y sobre ésta se lleva el lado b. Por último, se une el extremo de **b** con el de **a**.

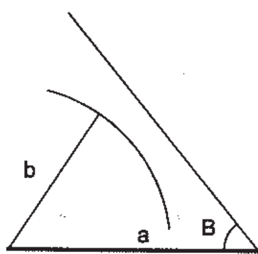


- a, b, $\hat{B}$.

Se dibuja **c**. Por un extremo se traza una recta que forme un ángulo $\hat{B}$ y, por el otro extremo, un arco de circunferencia de radio **b**. Donde éste corte a la recta es la solución. Puede haber dos, una o ninguna solución.



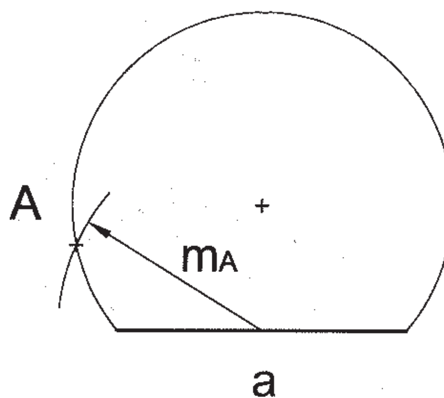
Dos soluciones



No hay solución

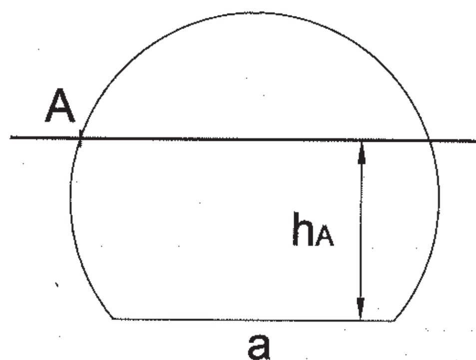
- a, $\hat{A}$, m_A

A partir del lado a se trazo un arco capaz de $\hat{A}$. Desde el punto medio de **a** se traza un arco de radio m_A, que cortará al arco capaz en el vértice A. Normalmente hay dos soluciones



- a, $\hat{A}$, h_A

A partir del lado **a** se traza el arco capaz de $\hat{A}$. Se traza, a una distancia h_A, una paralela a **a**, que cortará al arco capaz en el vértice A. Puede haber dos soluciones.

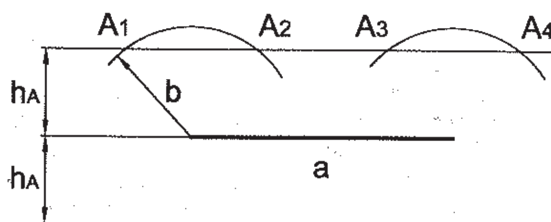


- a, b, h_A

Se dibuja el lado **a**. Se traza, a una distancia h_A, una paralela a **a**. Por un extremo de **a** se traza un arco de radio **b**, que corta a la paralela a **a** en 0, 1 ó 2 puntos según sea **b** menor, igual o mayor que h_A.

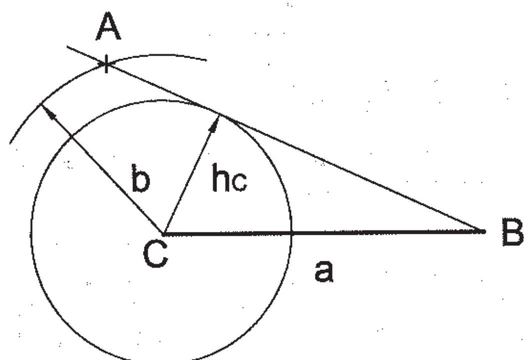
Se hace igual con el otro extremo de **a**.

Luego habrá 0, 1 ó 2 soluciones en el semiplano superior y otras tantos en el semiplano inferior.



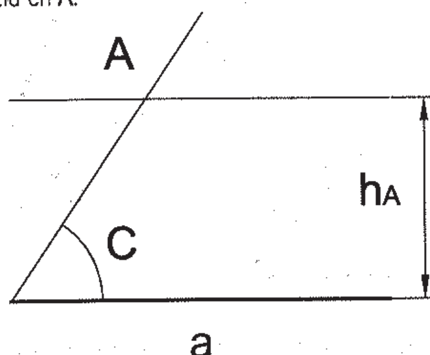
• a, b, h_C.

Se dibuja el lado **a**. Por un extremo se trazo la circunferencia de radio h_C. Por el otro extremo de **a** se traza la tangente a esta circunferencia. Sobre esta tangente estará **c**. Por el primer extremo de **a** se traza un arco de radio **b**, que cortará a la tangente en el vértice A.



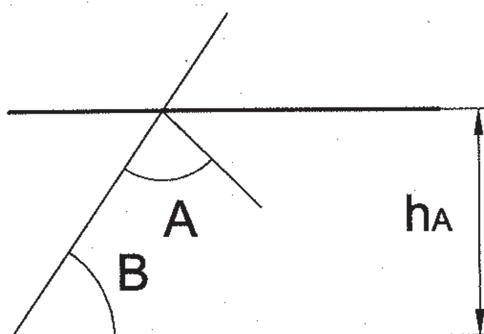
• a, $\hat{C}$, h_A.

Por un extremo de a se traza una recta que forme un ángulo $\hat{C}$. Se traza, a una distancia h_A, una paralela a **a**, que corta a dicha recta en A.

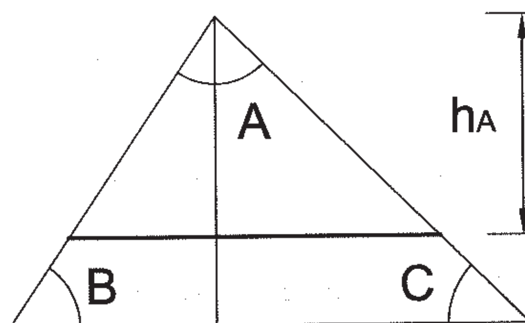


• $\hat{A},\hat{B},h_A$

Se trazan dos rectas que formen un ángulo $\hat{B}$. A una distancia h_A se traza una paralela a una de ellas, que corta a la otra en A. Se traza en ese punto el ángulo $\hat{A}$, con lo que queda terminado el triángulo.

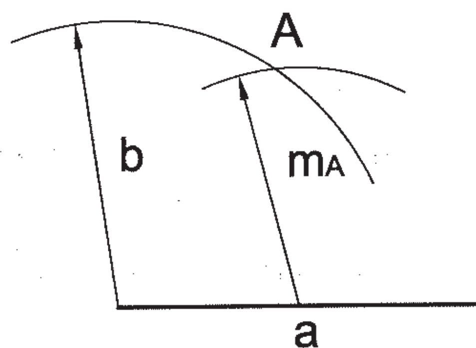


También se podría hallar el tercer ángulo $\hat{C}$, que es el suplementario de $\hat{A}+\hat{B}$, construir un triángulo con esos tres ángulos y luego otro semejante a él que tenga de altura h_A.



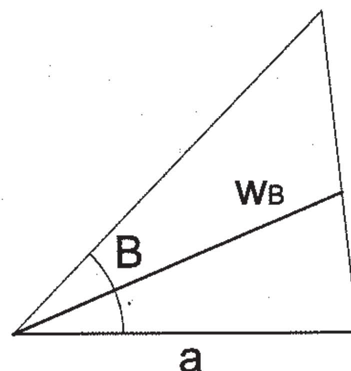
• a, b, m_A

Se dibuja el lado **a**. Por un extremo se traza un arco de radio **b**. Por el punto medio de **a** se dibuja otro arco de radio m_A. Donde se corten es el vértice A.



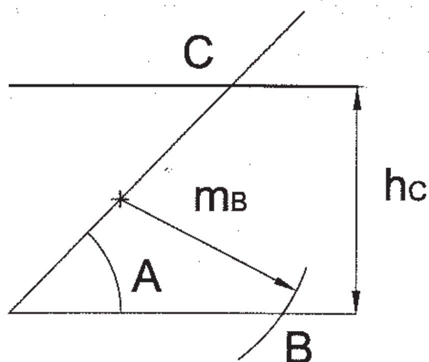
• a, $\hat{B}$, w_B

En un extremo de **a** se dibuja el ángulo $\hat{B}$. Se traza su bisectriz, y sobre ella se lleva la longitud w_B, cuyo extremo estará en el lado **b**.



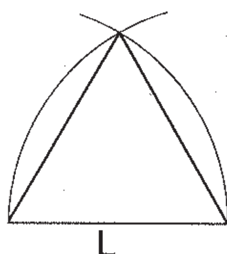
• $\hat{A}$, m_B, h_C.

Se dibuja el ángulo $\hat{A}$. Se traza a una distancia h_C una paralela a un lado, que corta al otro lado en el vértice C. Por el punto medio de AC se trazo un arco de radio m_B, que corta al otro lado en B.



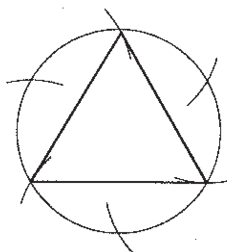
- Triángulo *equilátero* de lado conocido.

Se dibujo el lado y, por sus extremos, se trazan arcos de radio igual al lado. Donde se corten es el tercer vértice.



- Triángulo *equilátero* inscrito en una circunferencia de radio dado.

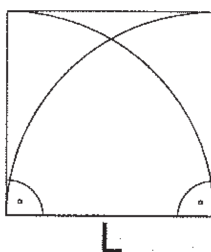
A partir de un punto cualquiera de la circunferencia se lleva el radio seis veces sobre ella, y se unen las divisiones según la figura.



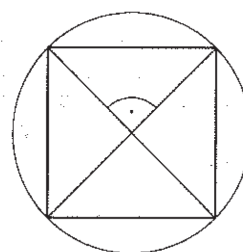
3. CUADRADO

Es el polígono compuesto por cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.

Para dibujarlo a partir del lado, se trazan perpendiculares por sus extremos, y sobre éstas se lleva la longitud del lado, con la regla o con el compás.



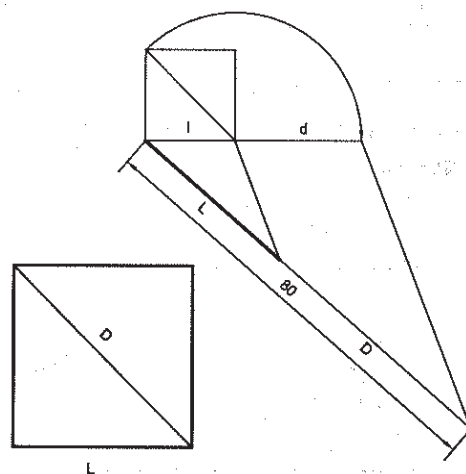
Si queremos dibujarlo inscrito en una circunferencia se trazan dos diámetros perpendiculares y se unen sus extremos.



EJERCICIO RESUELTO 2

Construir un cuadrado del que se conoce que el lado y la diagonal suman 80 mm.

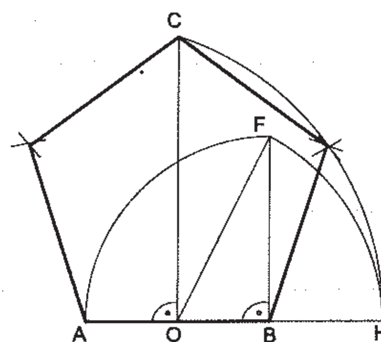
Sabemos la forma de la solución: un cuadrado, pero nos falta conocer el tamaño. Para ello construimos un cuadrado auxiliar, sumamos gráficamente su lado y su diagonal, y aplicando el teorema de Tales, lo ampliamos proporcionalmente hasta que esas dos cantidades sumen los 80 mm dados.



4. PENTÁGONO REGULAR

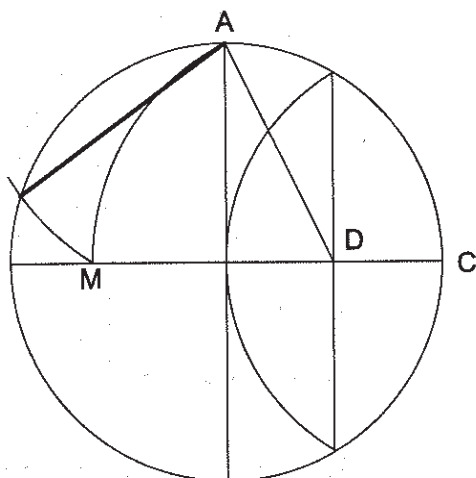
Construcción a partir del lado

Una vez dibujado el lado $\overline{AB}$ se hacen los siguientes pasos:
1) Se trazo la mediatriz por O y la perpendicular por B.
2) Con centro en B y radio AB se halla F.
3) Con centro en O y radio OF se halla H.
4) Con centro en A y radio AH se halla C.
5) Con radio AB y centro en A, B y C se trazan arcos que se cortan en los otros dos vértices.



Construcción del pentágono inscrito en una circunferencia de radio r

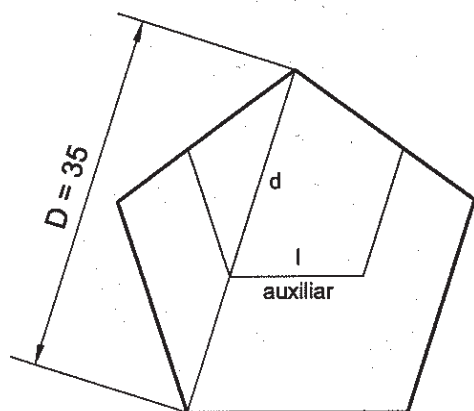
Se hace lo siguiente:
1) Se trazan dos diámetros perpendiculares
2) Con centro en C y radio r se halla D
3) Con centro en D y radio DA hallamos M.
4) MA es la longitud del lado del pentágono, que se lleva cinco veces sobre la circunferencia.



EJERCICIO RESUELTO 3

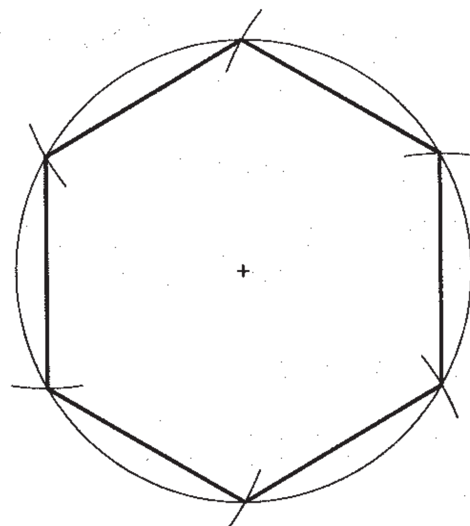
Construir un pentágono regular sabiendo que la diagonal mide 35 mm.

Dibujamos un pentágono regular auxiliar de lado l, y aplicando el teorema de Tales, lo ampliamos proporcionalmente hasta que su diagonal mida 35 mm.



5. HEXÁGONO REGULAR

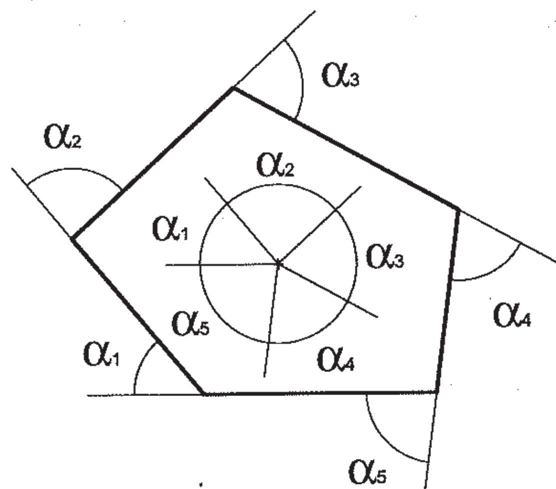
Para construir un hexágono regular se dibujo la circunferencia de radio igual al lado y sobre ella se lleva seis veces el radio, con lo que obtenemos los vértices del hexágono.



6. CONSTRUCCIÓN DEL POLÍGONO REGULAR DE N LADOS

A partir del lado

En un polígono, llamamos ángulo exterior al que forman en un vértice un lado y la prolongación del siguiente. En todo polígono (regular o no), la suma de los ángulos exteriores es 360°, ya que si los ponemos adyacentes tomando como vértice común un punto interior del polígono se ve que el giro total es una vuelta completa, es decir, 360°.



En un polígono regular de n lados, cada ángulo exterior mide $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$. El ángulo *interior* medirá, por tanto, 180°- α .

Para deducir cuánto vale la suma de los ángulos interiores, basta darse cuenta de que en cada vértice, la suma del ángulo interior y el exterior suman 180°. Por tanto , si hay n vértices:

$$n \cdot 180^o = \sum \alpha_{int\,eriores} + \sum \alpha_{exteriores} =$$
$$= \sum \alpha_{int\,eriores} + 360^o$$

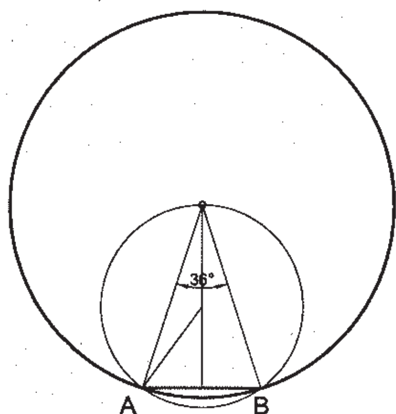
$$\sum \alpha_{int.} = (n-2) \cdot 180^o$$

Para dibujar el polígono se lleva el ángulo interior (también puede hacerse con el exterior) en el extremo de un lado, sobre esta recta se lleva la longitud del lado y se repite n veces esta construcción.

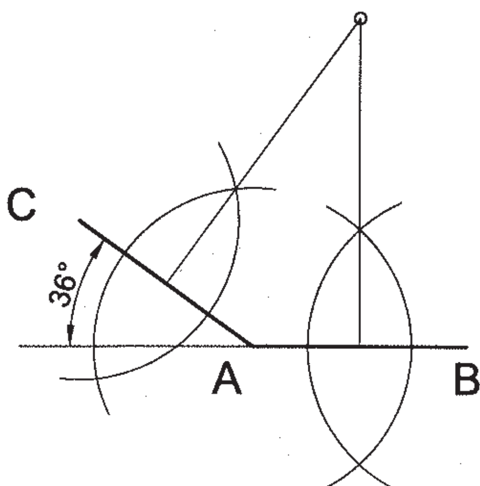
EJERCICIO RESUELTO 3

El segmento AB es el lado de un decágono regular convexo. Hallar gráficamente el radio de la circunferencia circunscrita al mismo.

El ángulo central en un decágono es 36°. Por tanto, el centro de la circunferencia pedida está en el arco capaz de esos grados, del lado AB, y en la mediatriz del lado.



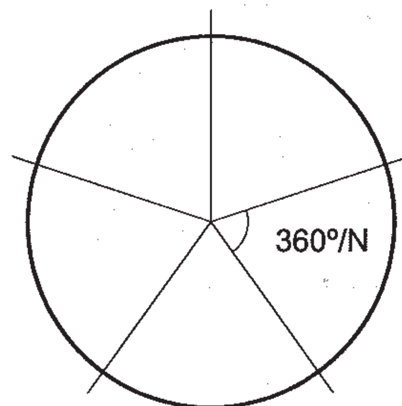
También podríamos hallar el ángulo exterior del decágono: 360°/10= 36°, dibujar el lado BC, adyacente al AB, y hallar el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices ABC.



En cualquiera de los dos casos, el radio pedido se obtiene uniendo el centro de la circunferencia con un vértice.

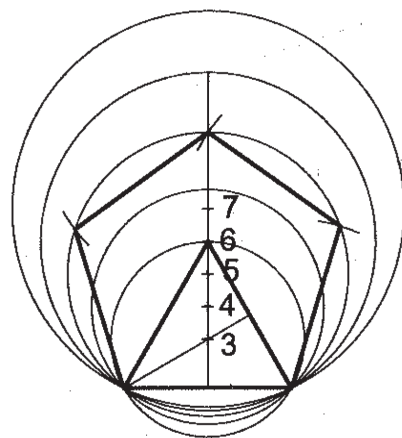
Polígono inscrito en una circunferencia de radio dado

Desde el centro de la circunferencia se dividen los 360° en n partes iguales con rectos. Esas rectas cortan a la circunferencia en los vértices del polígono.



Construcción aproximada a partir del lado

Se construye el triángulo equilátero de lado l. Se traza la altura y se halla el ortocentro. la distancia de este punto al vértice se divide en tres partes iguales. Esta división se lleva en la prolongación de la altura las veces que haga falta. Así salen los centros de las circunferencias que circunscriben a los polígonos de cuatro, cinco... lados.



Construcción aproximada de un polígono regular inscrito

Se hace lo siguiente:

1) Se trazan dos diámetros perpendiculares.
2) Uno de ellos se divide en n partes iguales.
3) Con centro en A y B y radio AB se halla E.
4) Uniendo E con la segunda división de AB nos sale el lado del polígono AC, que se lleva n veces sobre la circunferencia.



7. CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO REGULAR A PARTIR DE LA APOTEMA

Apotema es el segmento que va del centro del polígono regular a la mitad de cualquier lado.

El ángulo central del polígono mide 360°/n . La apotema OA lo divide en dos partes iguales. Por tanto, si llevamos la mitad de este ángulo a ambos lados de un extremo O de la apotema, y por el otro A trazamos una perpendicular a ella, hallamos dos vértices B, C del polígono.

Para hallar el resto de los vértices basta trazar la circunferencia de centro O y radio OB, y llevar sobre ella n veces el lado.

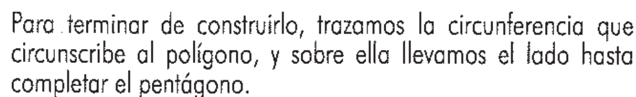
$\alpha = 360°/n$



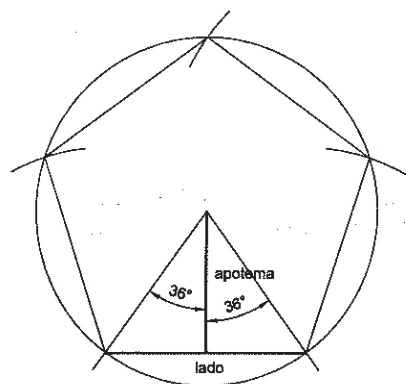
EJERCICIO RESUELTO 4

Conocida la apotema a= 25 mm de un pentágono regular, dibujar el polígono.

El ángulo central en un pentágono es 360°/5=72°, y su mitad es 36°. Por tanto, dibujamos la aoptema de forma vertical, y a ambos lados trazamos una recta que forme 36° con la apotema. Esas dos rectas cortan a la perpendicular a la apotema justo en el lado del pentágono.



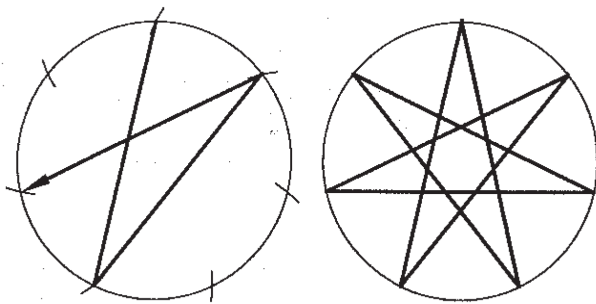
Para terminar de construirlo, trazamos la circunferencia que circunscribe al polígono, y sobre ella llevamos el lado hasta completar el pentágono.



8. POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Los polígonos regulares de cinco o más lados pueden originar otros en forma de estrella: basta prolongar los lados que no sean contiguos.

También se pueden obtener dividiendo una circunferencia en n partes iguales ($n \geq 5$), y uniendo las divisiones saltando alguna entre ellas. Si se salta una división cada vez, hay que dar dos vueltas para cerrar el polígono estrellado; si se saltan dos divisiones, sale un polígono estrellado de tres vueltas, etc.



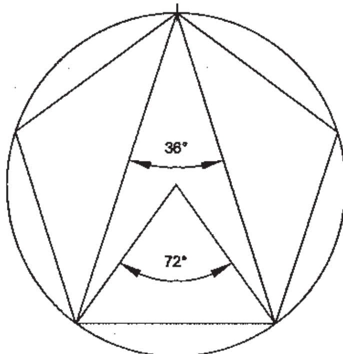
En el interior del polígono estrellado siempre se forma un polígono regular normal.

EJERCICIO RESUELTO 5

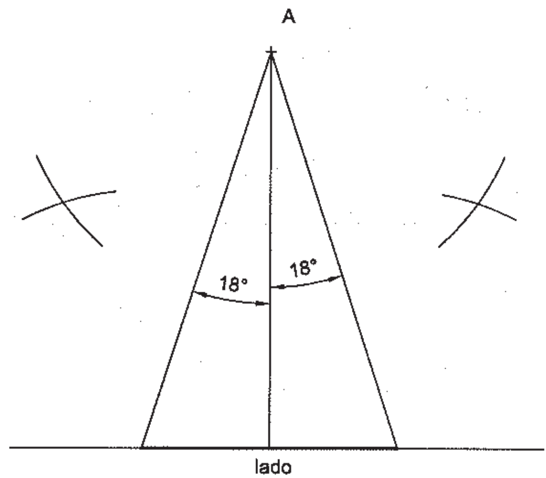
Dibujar un pentágono regular del que se conoce uno de sus vértices y la recta soporte del lado opuesto.

A

En un péntágono regular, el ángulo que forman las dos diagonales superiores es de 36°, ya que es un ángulo inscrito en la circunferencia que pasa por los vértices, que tiene un ángulo central de 72°.



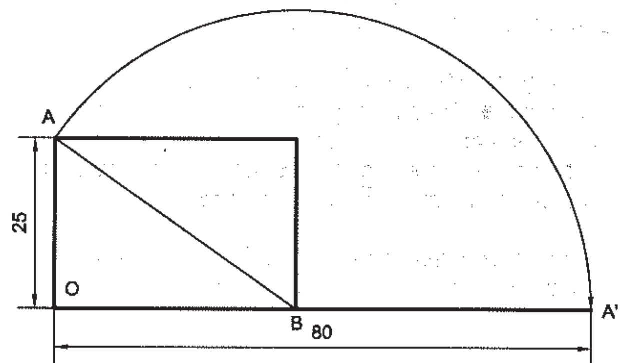
Por tanto, desde A trazamos una perpendicular a la recta donde está el lado, y una recta a cada lado que formen un ángulo de 36°/2=18° conla vertical. Esas rectas delimitan el lado inferior del pentágono. Los dos vértices que faltan se detreminan con arcos de longitud el lado, trazados desde los vértices conocidos.



EJERCICIO RESUELTO 6

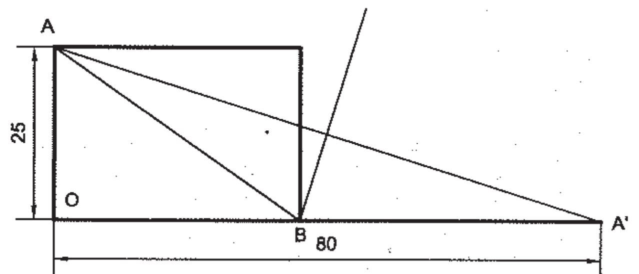
Construir un rectángulo sabiendo que uno de sus lados mide 25 mm, y que la suma de la diagonal y el otro lado es 80 mm.

Dibujemos una figura de análisis con la solución aproximada.



En ella no conocemos el punto B. Pero analizando los datos, se ve que debe cumplir que BA=BA', por lo que el punto B equidista de los puntos A y A', es decir está en la mediatriz del segmento AA'.

Por tanto dibujamos los segmentos conocidos AO y OA', trazamos la mediatriz de AA', y donde se corte con OA' es el punto B. Por último completamos el rectángulo.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dibujar un pentágono regular de 4 cm de lado.

2. Dibujar un pentágono regular inscrito en una circunferencia de r = 4 cm.

3. Construir un heptágono regular de 3 cm de lado.

4. Construir un heptágono regular inscrito en un circunferencia de radio = 3 cm.

5. Construir un decágono regular de 3'5 cm de apotema.

6. Construir un decágono regular de lado 2 cm.

7. Construir un triángulo ABC conociendo a= 5'5 cm, el ángulo $\hat{A}$ = 45° y la mediana desde A, m_A = 6 cm.

8. Construir un triángulo ABC conociendo a = 6 cm, el ángulo $\hat{A}$ = 60° y la altura h_A = 4 cm.

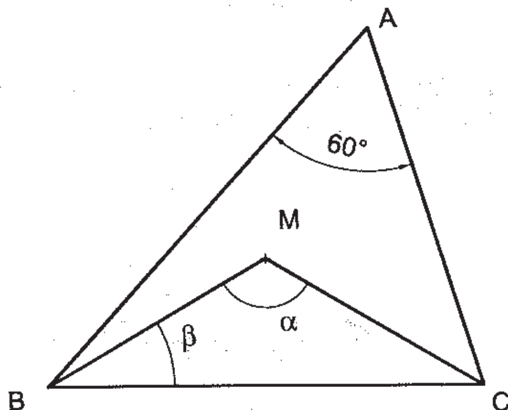
9. Construir los triángulos ABC conociendo:

- a = 5 cm, b = 4 cm, h_A = 2,5 cm
- a = 6 cm, $\hat{C}$ = 45°, h_A = 3 cm
- a = 6 cm, b = 5 cm, m_A = 3 cm
- $\hat{A}$ = 60°, m_B = 4 cm, h_C = 3 cm
- a = 5 cm, b = 4'5 cm, h_C = 2,5 cm
- $\hat{A}$ = 45°, $\hat{B}$ = 30° y h_A = 3 cm
- a = 4 cm, $\hat{B}$ = 60°, w_B = 3,5 cm

10. Construir un triángulo ABC dados $\hat{B}$ =60°, $\hat{C}$ =75° y la longitud del segmento m que es la mediana desde A.

m

11. En el triángulo ABC el ángulo $\hat{A}$ vale 60°. Si M es el circuncentro del triángulo deducir razonadamente y en este orden los valores de los ángulos α y β.



12. Construir un triángulo del que se conocen el lado a = 40 mm y las alturas h_A =25 mm y h_B = 35 mm. ¿Cuántas soluciones hay?

13. Construir un triángulo del que se conocen el ángulo $\hat{A}$ = 60°, la bisectriz w_A = 40 mm y la altura h_A = 30 mm.

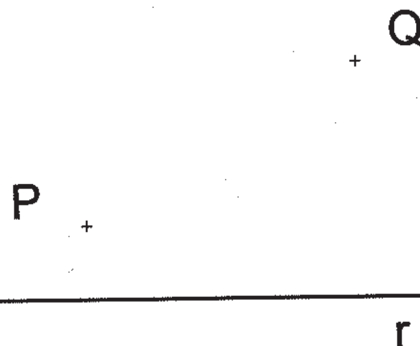
14. Construir un triángulo del que se conocen el ángulo $\hat{B}$ = 60°, la altura h_A = 40 mm y h_B = 30 mm.

15. Construir un triángulo del que se conocen la mediana m_A = 50 mm, la altura h_A =40 mm, y que el lado a es el doble de b.

16. Construir un triángulo del que se conocen a = 50 mm, la suma b + c = 80 mm, y la altura h_C = 30 mm.

17. Construir un triángulo conocido el lado a = 40 mm, la mediana de a = 35 mm, y la altura de a =30 mm.

18. Construir un triángulo rectángulo que tenga su hipotenusa contenida en la recta r, un cateto debe pasar por el punto P, el otro por el punto Q y además la altura correspondiente a la hipotenusa debe valer 40 mm.



19. Dibujar un triángulo ABC del que se conoce el lado AC = 90 mm, el ángulo $\hat{A}$ = 45° y la bisectriz correspondiente al vértice C, w_C =75 mm.

20. Dibujar un triángulo ABC del que se conoce que su lado AB tiene de longitud 60 mm, el ángulo $\hat{C}$ es de 30° y la altura correspondiente al vértice B es h_B = 30 mm. Analizar el número de soluciones posibles.

21. Dibujar un triángulo ABC del que se conoce el ángulo $\hat{A}$ = 45°, $\hat{B}$ = 60° y el radio de la circunferencia circunscrita R= 30 mm.



22. Dibujar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 80 mm y la altura sobre ella sea de 35 mm.

23. Construir un triángulo rectángulo de perímetro 180 mm, siendo uno de sus ángulos de valor 30°.

24. Dibujar el triángulo ABC del que se conocen el ángulo $\hat{C} = 60°$, la altura $h_B = 5$ cm, y la mediana $m_A = 6$ cm.

25. Dibujar un triángulo ABC del que se conocen el lado b = 60 mm, el ángulo $\hat{A} = 45°$ y la bisectriz correspondiente a este ángulo $w_A = 45$ mm.

26. Construir un triángulo que tiene por mediana y altura sobre el lado BC los segmentos $m_A = 51$ mm y $h_A = 49$ mm. Además, se sabe que la mediana sobre el lado AC es $m_B = 81$ mm.

27. De un triángulo ABC se sabe que su base AB mide 70 mm y ha de estar contenida en la recta r. Su baricentro es el punto G y la mediana m_C relativa a la base mide 50 mm. Dibujar todos los triángulos ABC que cumplan los requisitos anteriores.



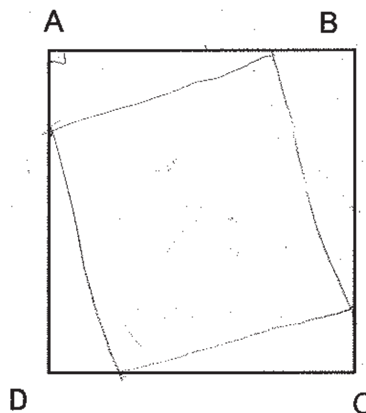
28. Dibujar un rombo de lado l=35 mm cuyas diagonales sumen $d_1 + d_2 = 90$ mm.

29. De un triángulo ABC se conocen los vértices A, B y la posición de su baricentro G. Terminar el dibujo de dicho triángulo.





30. Inscribir un cuadrado de 35 mm de lado en el cuadrado ABCD.



31. Si AB es el lado de un pentágono regular, construir gráficamente el radio de su circunferencia circunscrita.



32. Tenemos un pentágono (no necesariamente regular) cuyos lados miden cada uno un metro y otro pentágono cuyos lados miden cada uno dos metros. Contestar razonadamente si ambos pentágonos han de ser necesariamente semejantes.

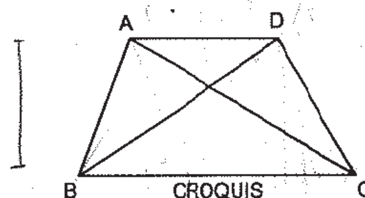
33. En una circunferencia de 30 mm de radio inscribir un rectángulo cuyo perímetro valga 140 mm.

34. Construir un pentágono regular estrellado de dos vueltas conocido l = 20 mm.

35. Dibujar un decágono regular estrellado de tres vueltas, sabiendo que el radio de la circunferencia donde se inscribe es 25 mm.

36. Construir un octógono cuyo lado mida 25 mm.

37. Dibujar un trapecio ABCD de altura h=30 mm, diagonales AC=50 y BD=45 mm, siendo CD=DA.



38. Dibujar un octógono regular sabiendo que dos de sus lados paralelos están situados en las rectas r y s.

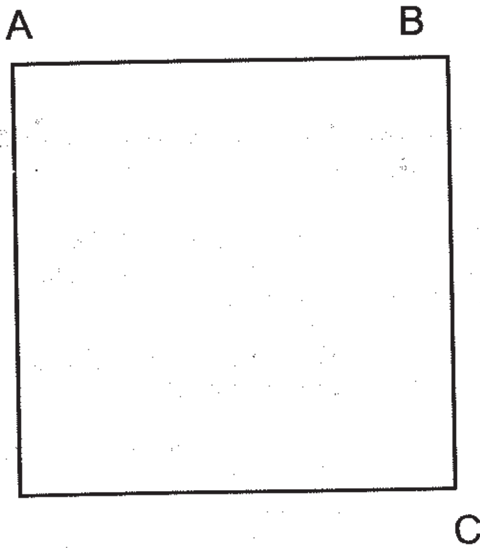
r



s



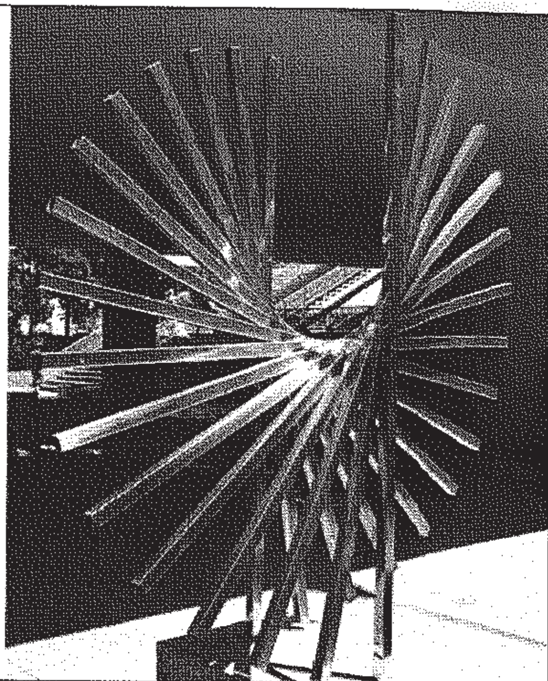
39. Dado el cuadrado ABCD, dibujar un octógono regular en el cual los vértices del cuadrado sean también vértices del octógono.



40. Construir un paralelogramo en el que dos de sus lados formen un ángulo de 60° y sumen 75 mm, siendo la diagonal menor de 40 mm.

TEMA 5

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS



1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Transformación geométrica es la operación que permite deducir una nueva figura de otra dada. Por tanto, existirán elementos **origen** y elementos **transformados**.

El interés del estudio de las transformaciones radica en la posibilidad de facilitar la resolución de problemas geométricos que en su disposición original resultan difíciles de abordar. En estos casos, se aplica una transformación a los datos convirtiéndolos en otros de disposición más sencilla, con los que se resuelve el problema. Después basta aplicar a esta solución la transformación inversa para obtener el resultado buscado.

Clasificación

a) Transformaciones **isométricas:** son aquellos que conservan las dimensiones y los ángulos entre la figura original y su transformada. También se llaman movimientos. Por ejemplo, las simetrías, la traslación, el giro.

b) Transformaciones **isomórficas o conformes:** son aquellas que sólo conservan la forma, es decir, en ellas los ángulos de la figura original y de la transformada son iguales y las longitudes proporcionales. Por ejemplo, la homotecia.

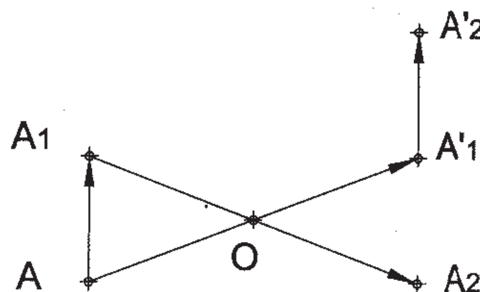
c) Transformaciones **anamórficas:** son aquellos que cambian la forma entre la figura original y la transformada. No conservan ni ángulos ni proporciones de medidas. Como ejemplo tenemos la inversión y la homología.

Elementos de una transformación geométrica

Se llaman **elementos característicos** de una transformación a aquellos que nos definen todos las correspondencias entre la figura original y la transformada.

Se llaman **elementos dobles** de una transformación a aquellos que se transforman en sí mismos.

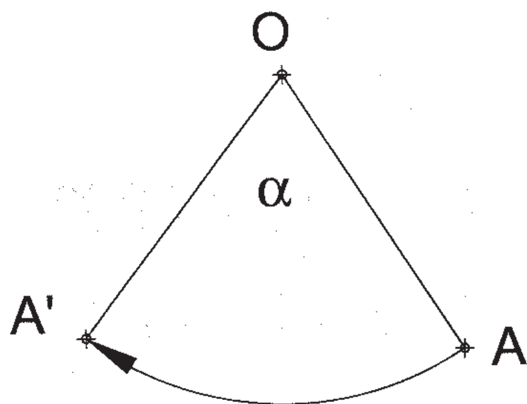
Se llama **producto de transformaciones** a la transformación obtenida por la aplicación sucesiva a una figura geométrica de dos o más transformaciones en un determinado orden. Este producto no es conmutativo. Por ejemplo, el punto A se transforma en el A_2 cuando se le aplica una traslación y luego una simetría puntual, y sin embargo se transforma en el A'_2 cuando primero se le aplica la simetría y luego la traslación.



Vamos a estudiar en este tema cinco transformaciones: **el giro, la traslación. la simetría, la homotecia y la inversión.** Otra transformación, la homología, la estudiaremos en la lección siguiente.

2. GIRO

El punto A' es el transformado del A por un giro de ángulo α y centro O cuando se cumple que la longitud OA = OA' y el ángulo $A\hat{O}A'$ es igual a α. Es una transformación isométrica.



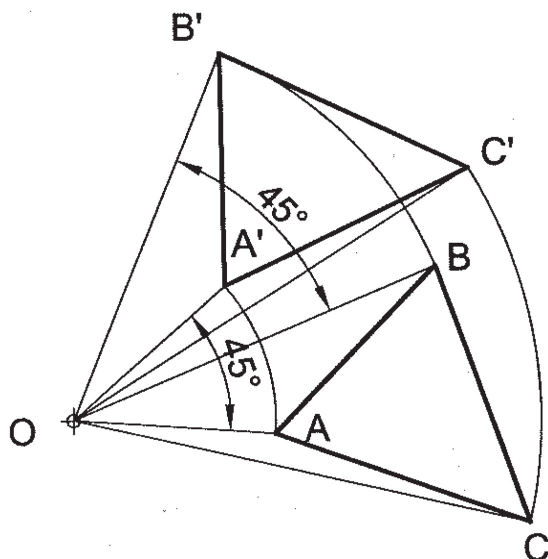
Elementos característicos: la transformación queda definida con el centro O, el ángulo α y el sentido de giro.

Elementos dobles: punto doble sólo es el centro O. Figura doble también sería cualquier circunferencia de centro O.

EJERCICIO RESUELTO 1

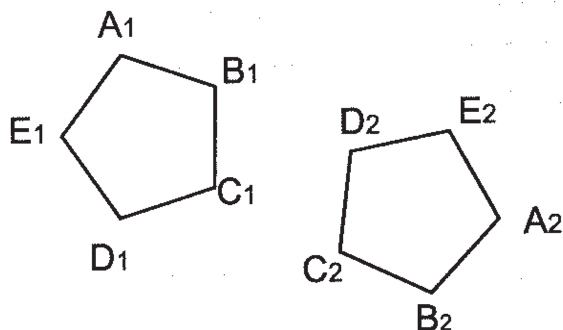
Dibujar la figura transformada de la dada por un giro de 45° alrededor de O, en sentido de las agujas del reloj.

Unimos O con A. Trazamos una recta que forme 45° con ella y un arco de radio OA. El punto de intersección es A'. De la misma forma se hace con B y C.



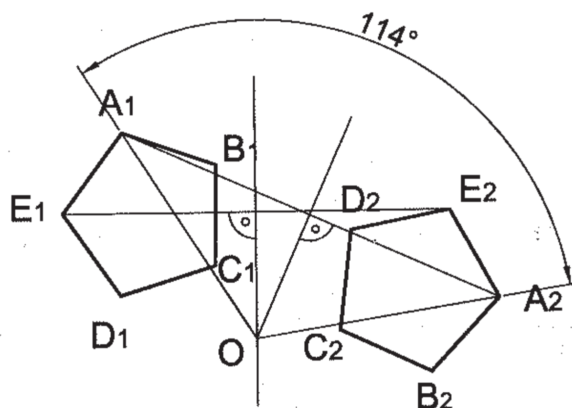
EJERCICIO RESUELTO 2

Dadas dos posiciones del mismo pentágono, hallar el giro (centro y ángulo) que lleva uno sobre otro.



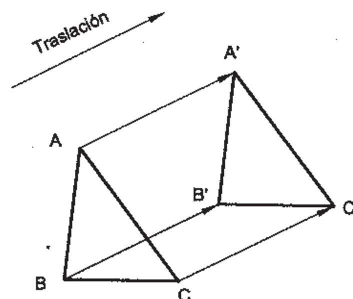
Cada punto describe en el giro un arco de circunferencia de centro O. Por tanto el centro debe estar en las mediatrices de A_1A_2, de B_1B_2, etc. Se trazan dos de ellas y O es el punto donde se corten.

Y el ángulo se halla uniendo O con A_1 y A_2.



3. TRASLACIÓN

Una traslación queda definida por la longitud de un segmento, una dirección y un sentido. Cada punto de una figura que sufre una traslación se desplaza en la dirección dada la longitud de ese segmento.

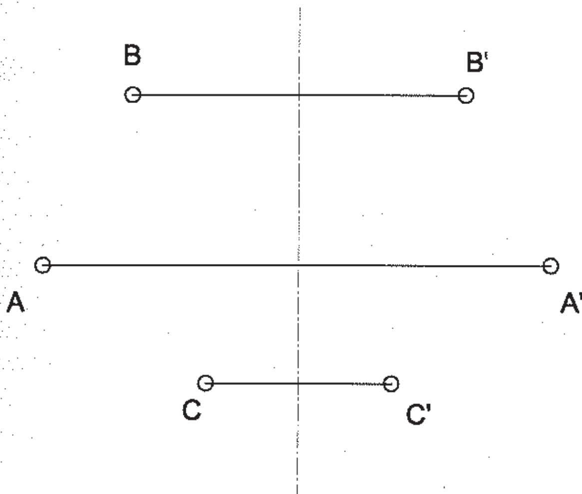


Como todos los puntos se desplazan lo mismo, la figura no cambia de tamaño ni de orientación, y las aristas antes y después de la traslación, son paralelas.

No tiene puntos dobles, aunque las rectas paralelas a la dirección de traslación quedan iguales en su conjunto después de trasladarse.

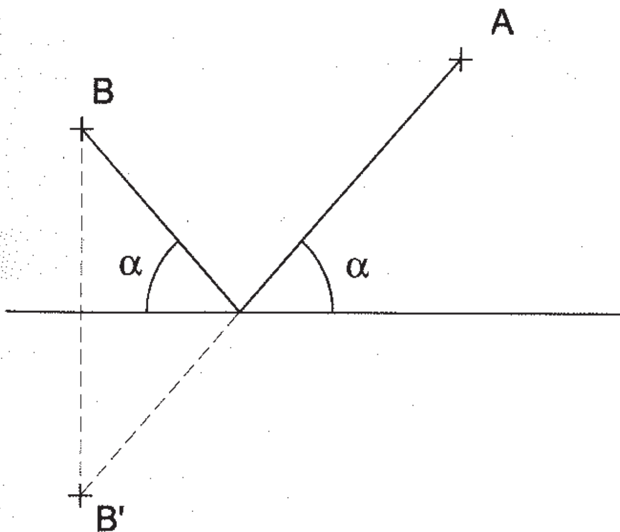
4. SIMETRÍA

Hay dos tipos de simetría, la axial y la puntual. Una simetría axial queda definida por el eje de simetría. El punto trasformado del A está situado en una recta perpendicular al eje, trazada desde A, y a la misma distancia del eje de simetría que el punto original.

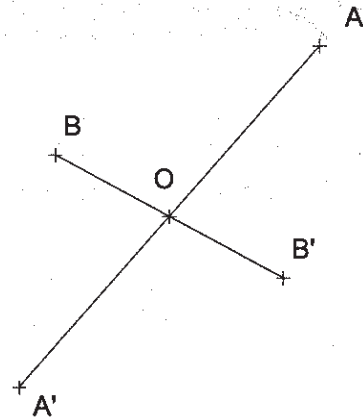


Todos los puntos del eje de simetría son dobles, así como cualquier figura que sea simétrica respecto de ese mismo eje.

Una recta cualquiera se transforma en otra que forma el mismo ángulo con el eje que la original. Esto se aplica en problemas de reflejos en un plano, rebotes, etc.



Una simetría puntual queda definida sólo por el centro de simetría O. El transformado de un punto A estará en la recta OA, a la misma distancia de O que A, pero al otro lado de O.



5. HOMOTECIA

Dado un punto O y un número real K (positivo o negativo), se dice que A y A' son homotéticos cuando la recta AA' pasa por O y se verifica que:

$$\boxed{\frac{OA'}{OA} = K}$$

Al punto O se le llama centro de homotecia, y a la constante K relación, razón o constante de homotecia.

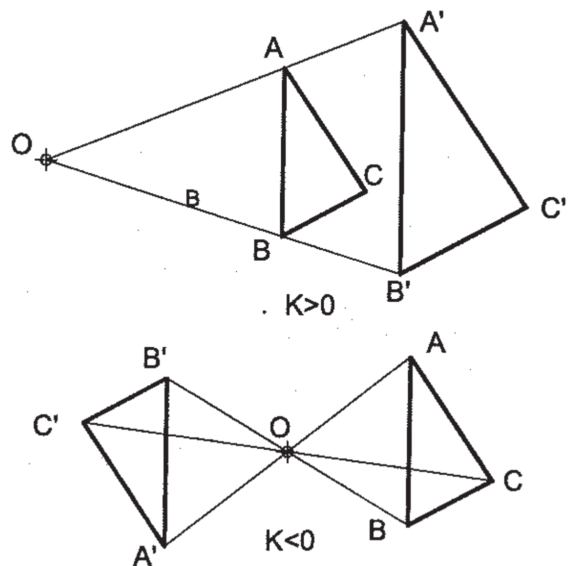
Si K > O, los puntos A y A' están al mismo lado de O, y la homotecia se llama **directa.**

Si K < O, los puntos A y A' están a distintos lados de O, y la homotecia se llama **inversa o negativa.**

Elementos característicos: La homotecia queda definida por O y K.

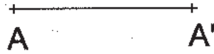
Elemento doble sólo es el centro de homotecia. Las rectas que pasan por O son rectas dobles, aunque sus puntos no lo son.

Es una transformación conforme, es decir, conserva los ángulos pero no las distancias.



EJERCICIO RESUELTO 3

Conocido un punto A y su homotético A', situar O para los siguientes valores de K= 2/3, K=7/4 y K=-3/4.



a) Si K=2/3, OA'=2/3·OA

es decir, OA' es más pequeño que OA y del mismo signo, por lo tanto O está a la derecha de A' y a una distancia de A' el doble que AA' :



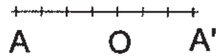
b) Si K=7/4, OA'=7/4·OA

OA' es mayor que OA y del mismo signo, por lo que O está a la izquierda de A, y AA' es 3·1/4 de OA, por tanto dividimos AA' en 3 partes, y llevamos 4 de esas partes a la izquierda de A.



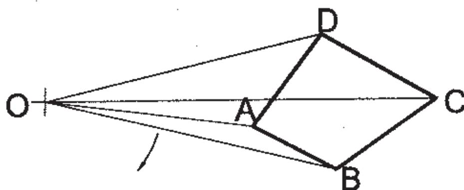
c) Si K=-3/4, OA'=-3/4·OA

O está entre A y A'. Y como la longitud de OA' es menor que la de OA, O estará más cerca de A' qie de A. Por tanto la distancia AA' se divide en (3+4) partes, y O estará a 3 partes de A' y a 4 de A.

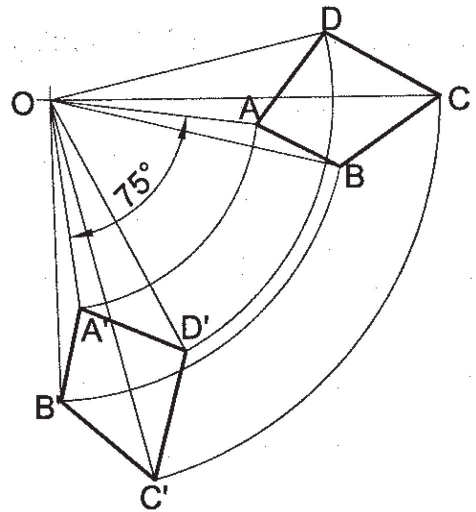


EJERCICIO RESUELTO 4

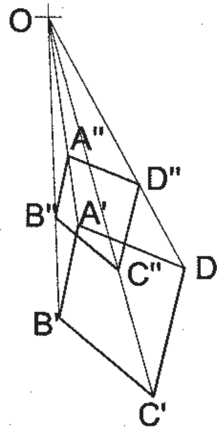
Hallar la figura transformada de la dada, después de un giro de 75° y una homotecia de razón 2/3, ambos de centro O.



Para aplicar el giro de 75° al punto A se traza por O una recta que forme con OA un ángulo de 75°, y se lleva sobre ella la longitud OA. Así se hace con todos los vértices de la figura.



Ahora aplicamos la homotecia de razón 2/3. El transformado de A' será A", que estará alineado con OA', y cumplirá que OA"= 2/3OA'. El resto de los vértices se hallan de la misma forma, o mejor, trazando paralelas a los lados hasta que corten a las rectas OB', OC' y OD'.



$$\frac{OA''}{OA'} = \frac{2}{3}$$

6. INVERSIÓN

Dado un punto fijo O y una constante K, se dice que A' es el inverso de A cuando está en la recta OA y cumple que:

$$\boxed{OA \cdot OA' = K}$$

Al punto O se le llama *centro de inversión* y a la constante K *potencia o constante de inversión.*

Si K > O, los puntos A y A' están al mismo lado de O y se llama *inversión positiva*. En caso contrario se llama *inversión negativa*.

Si A' es el inverso de A, A' lo es de A, ya que el producto es conmutativo:

$$OA \cdot OA' = OA' \cdot OA .$$

Elementos característicos: son el centro O y la potencia K.

Elementos dobles: los puntos situados a una distancia de O de $\sqrt{K}$ son inversos de sí mismos. Forman una *circunferencia de puntos dobles*, que llamaremos **cpd**.
Si K < O, la **cpd** es doble, pero no sus puntos, que tienen por inversos los extremos opuestos de los diámetros que pasan por ellos. Las rectas que pasan por O también son dobles, aunque no sus puntos.

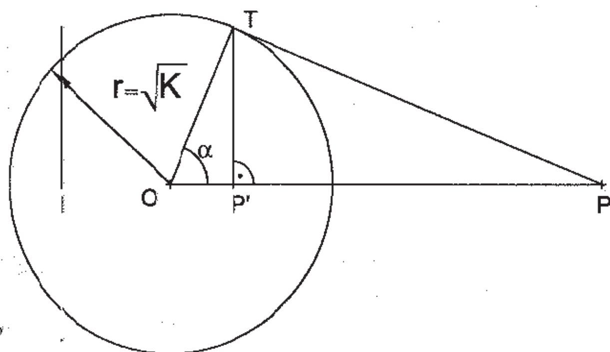
Determinación del inverso de un punto

Para obtener gráficamente el inverso de un punto P, se traza la cpd, que, como se ha dicho antes, tiene de centro O y radio $\sqrt{K}$. Si el punto P está en ella, su inverso es él mismo (si K < O, sería el diametralmente opuesto). Si el punto es exterior a esa circunferencia, para hallar P' unimos P con O. Desde P trazamos la tangente a la *cpd*, y por el punto de tangencia T trazamos una perpendicular a OP que la corta en P', inverso de P. En efecto, el punto P' cumple la definición de inverso de P, ya que:

$$cos\,\alpha = \frac{OP'}{OT} = \frac{OT}{OP};$$

$$OP' \cdot OP = OT \cdot OT = \sqrt{K} \cdot \sqrt{K}$$

$$OP \cdot OP' = K$$



Si K < O, el P' sería el simétrico respecto de O del hallado.

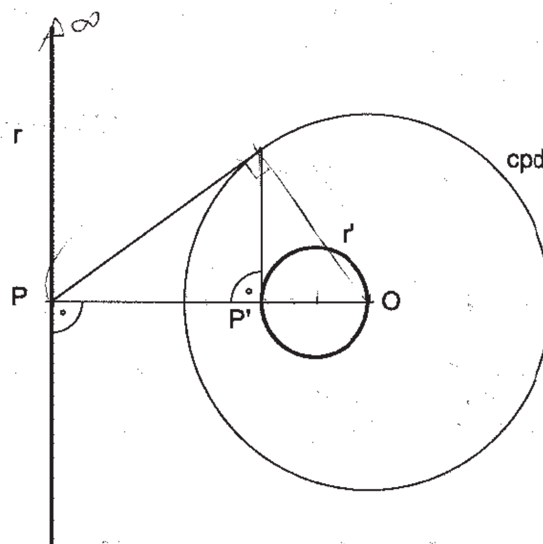
Por otra parte, si el que tenemos es P', para obtener su inverso P se hace al revés de esta construcción.

Por tanto, los puntos interiores a la **cpd** tienen sus inversos en el exterior de la **cpd**, y viceversa. Cuanto más cercano esté el punto a la **cpd**, más cercano a ella está su inverso. Por el contrario, cuanto más cercano está un punto a O, su inverso estará más lejano. Como caso límite, el inverso de O está en el infinito.

Inversa de una recta

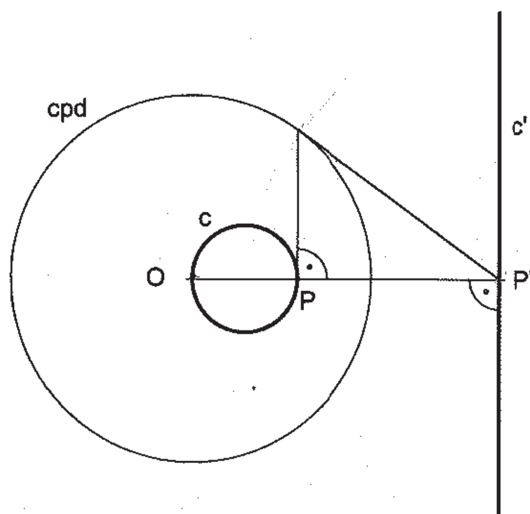
Si la recta pasa por O, es inversa de ella misma, aunque no punto a punto.

Si la recta no pasa por el centro de inversión, su inversa es una circunferencia que pasa por O, ya que el inverso del infinito de la recta es el punto O. Para ver su posición, se halla el inverso del punto P, pie de la perpendicular desde O a r. Por simetría, ese inverso P' junto con O nos dan el diámetro de la circunferencia que es inversa de la recta **r**.



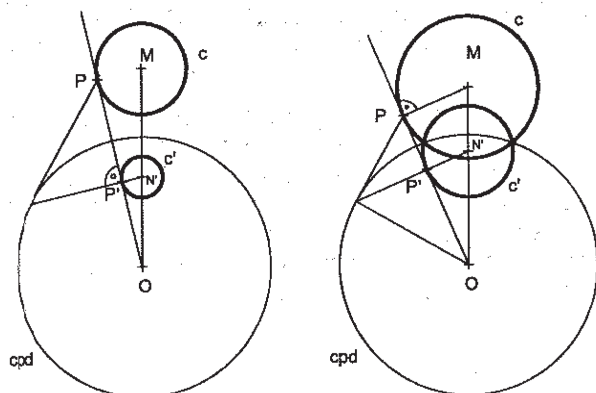
Inversa de una circunferencia

Si la circunferencia pasa por el centro de inversión, su inverso es una recta que no pasa por O. Para hallarla se hace el procedimiento inverso al anterior, es decir, se halla el inverso del punto P diametralmente opuesto a O, y por ese punto P' se traza una perpendicular a la recta que contiene el diámetro OP.



Si la circunferencia no pasa por O, su inversa es otra circunferencia homotética de la primera. Bastará hallar el inverso del punto P de tangencia de la recta que pasa por O. Esa recta será tangente en ese punto P' a la circunferencia inversa. El inverso del centro M no es el centro de la circunferencia

inversa. El centro N' estará en la intersección de la recta OM y la perpendicular a OP' en P', ya que el radio y la tangente son perpendiculares.



Propiedad de la inversión

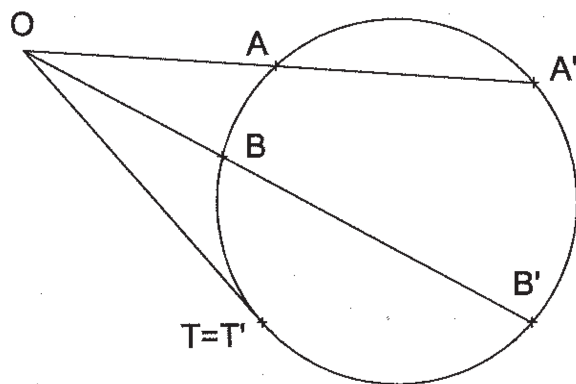
Tenemos una inversión definida por su centro O y por un par de puntos inversos A y A'. Se cumple que:

$$K = OA \cdot OA'$$

Si queremos obtener el inverso B' de otro punto B, debe cumplir también que

$$K = OB \cdot OB'$$

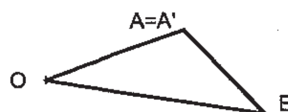
Si trazamos una circunferencia que pase por A, A' y B, la potencia de O respecto de ella es OA·OA', y también OB·OB', siendo B' el punto de corte de la recta OB con la circunferencia. Por tanto si OA·OA'=K, también OB·OB'=K, y el punto B' obtenido será el inverso del B.



Por tanto podemos expresar esta propiedad de la siguiente forma: **Por dos parejas de puntos y sus inversos siempre pasa una circunferencia.** Por supuesto, esa circunferencia no es siempre la misma, depende de las parejas de puntos. Y si trazamos la tangente desde O a esa circunferencia, el punto de tangencia es un punto doble, y por él pasa la **cpd**.

EJERCICIO RESUELTO 5

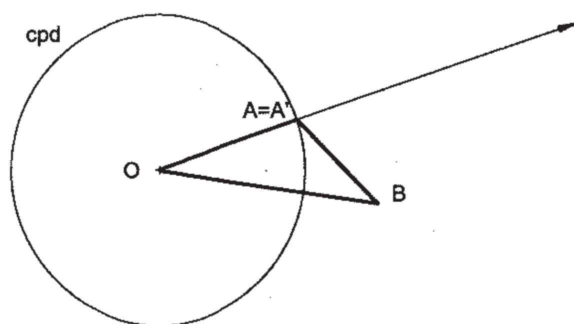
Hallar la figura inversa del triángulo OAB, siendo O el centro de inversión y A inverso de sí mismo.



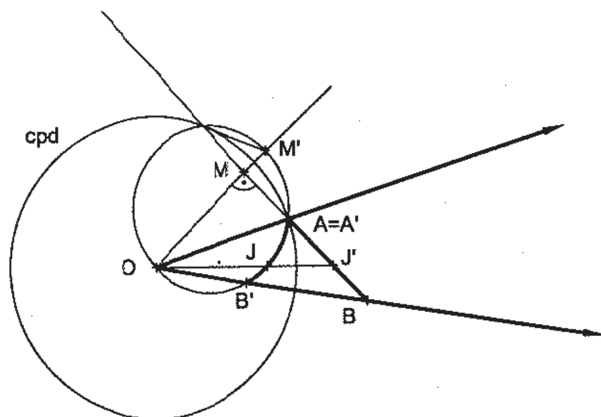
Al ser A inverso de sí mismo, está en la cpd. Por tanto, ésta tiene de radio OA.

Para hallar la figura inversa de un polígono hay que hallar el inverso de cada lado.

La figura inversa de la recta que contiene a OA es ella misma, por pasar por O. Dentro de ella, para determinar el segmento inverso del OA, se ven los inversos de los extremos: el de A es él mismo, y el de O está en el infinito. Por tanto, el inverso de OA es la semirrecta que va desde A' hasta el infinito.



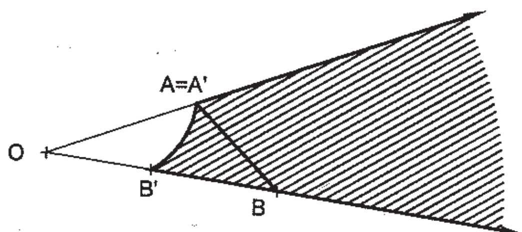
La figura inversa de la recta que contiene a AB es una circunferencia que pasa por O. Por tanto trazamos desde O una perpendicular a AB, que la corta en M. Hallamos el inverso M' de ese punto, y trazamos la circunferencia de diámetro OM'. Para determinar sobre esta figura el tramo que es el inverso de AB, unimos los extremos con O. Donde esas rectas corten a la circunferencia serán A' y B'.



Para saber cuál de las dos partes de la circunferencia corresponde al inverso del segmento AB, cogemos un punto cualquiera de éste, J, lo unimos con O y donde corte a la cir-

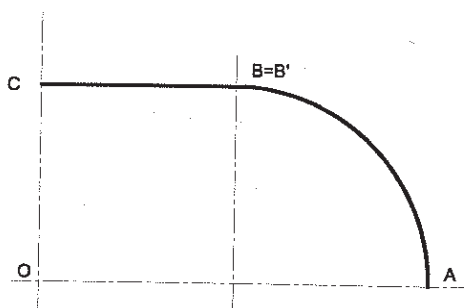
cunferencia será su inverso J', que estará sobre la parte que es inversa del segmento AB.

Por último, el inverso de OB estará sobre la recta que la contiene, por pasar ésta por O. Como el inverso de B lo conocemos, B', y el de O está en el infinito, el inverso de OB irá desde B' hasta el infinito. Por tanto, la figura inversa completa será:

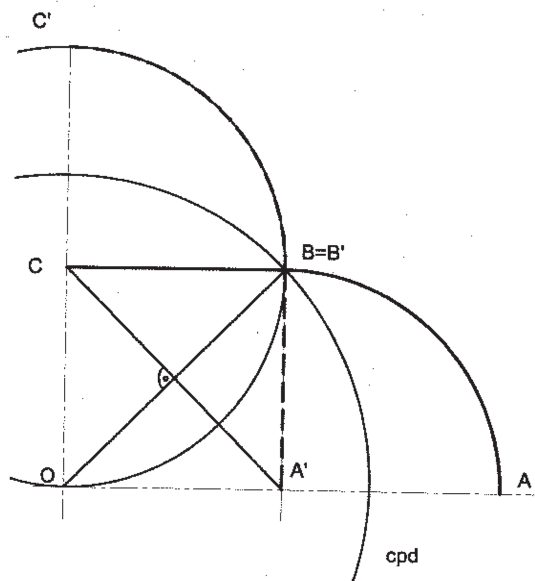


EJERCICIO RESUELTO 6

Determinar gráficamente la figura A'B'C', transformada de la ABC, en la inversión de centro O y potencia OB^2.



La cpd tiene de centro O y radio OB. La figura inversa del segmento CB es un arco de circunferencia que pasa por O, B' y está en la recta OC. La figura inversa del arco AB (cuya circunferencia pasa porO) es el segmento B'A'.

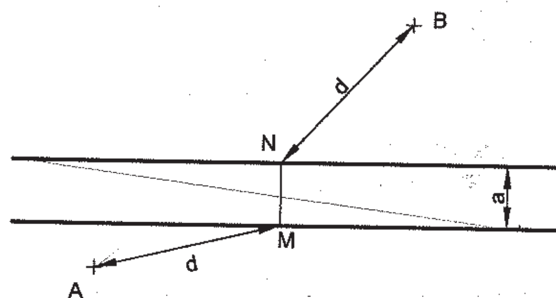


7. APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

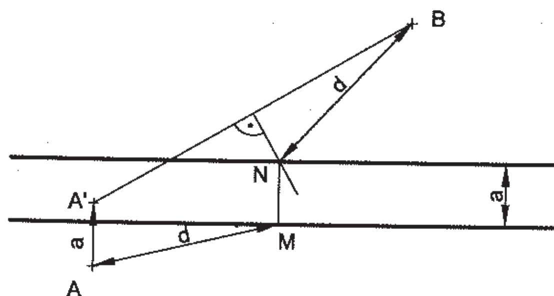
Hay muchos problemas geométricos que se pueden hacer aplicando alguna transformación geométrica. En ellos se busca una figura que cumpla unos datos. Para resolverlos se puede aplicar el método de la figura de análisis, que consiste en lo siguiente: se dibuja en un croquis una solución que cumpla con los datos, y se analizan las relaciones que lleva implícita, para poder trazarla con exactitud. Veamos algunos ejemplos:

EJERCICIO RESUELTO 7

Se pide situar un puente perpendicular a un río en la posición tal que la distancia de la población A al extremo inferior sea igual que la distancia de la población B al otro extremo.

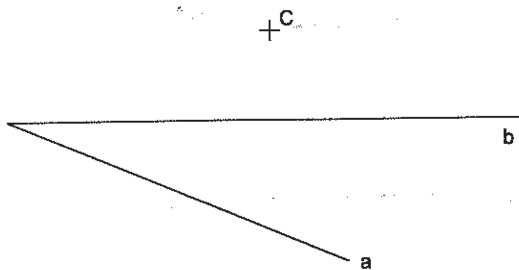


Supongamos la solución MN. En ella observamos que si trasladamos verticalmente la orilla inferior del río y la población A una cantidad igual a la anchura a del río, los puntos M y N coinciden. En ese caso, para que la distancia A'M y NB sean iguales, basta que M≡N esté en la mediatriz del segmento A'B. De esta forma, determinados M y N, se deshace la traslación y se tiene la solución pedida.



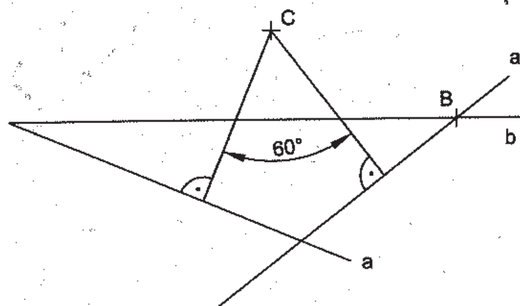
EJERCICIO RESUELTO 8

Se pide construir un triángulo equilátero ABC cuyo vértice A pertenece a la recta a, el B pertenece a la recta b y el vértice C está fijado.

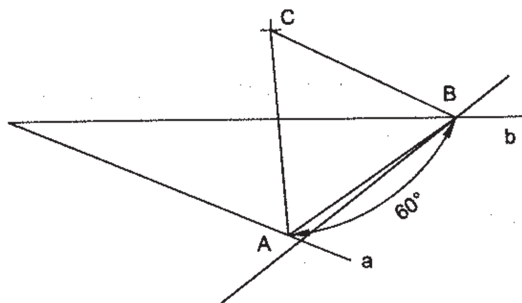


Supongamos que tenemos la solución. Al analizarla observamos que si giramos 60° alrededor de C al vértice A, coincide con B. Del punto A sabemos que está en la recta a, por tanto si giramos esta recta 60°, corta a la recta b en el punto B.

Para girar una recta, basta hallar la recta perpendicular a ella desde C, girar ese segmento, y la recta girada a' será perpendicular a ese segmento:

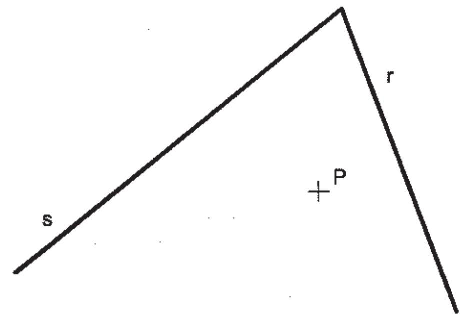


Una vez hallado B, A se halla como el vértice de un triángulo equilátero de lado BC.

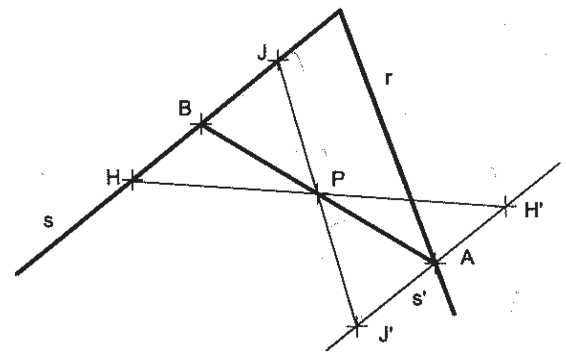


EJERCICIO RESUELTO 9

Dadas las rectas s y r de la figura y el punto P, trazar por P una recta que corte a s y r en dos puntos A y B respectivamente, de modo que se cumpla que PA=PB.

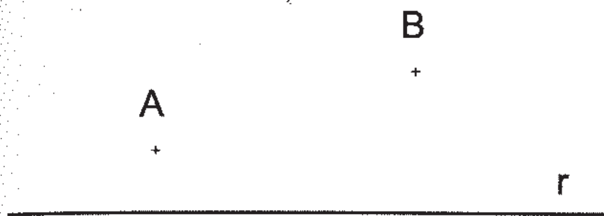


Supongamos la solución AB. En ella se observa que B es el simétrico de A respecto de P. Como A está en s, trazamos la recta simétrica de ella respecto a P, y donde corte a r será el punto B.

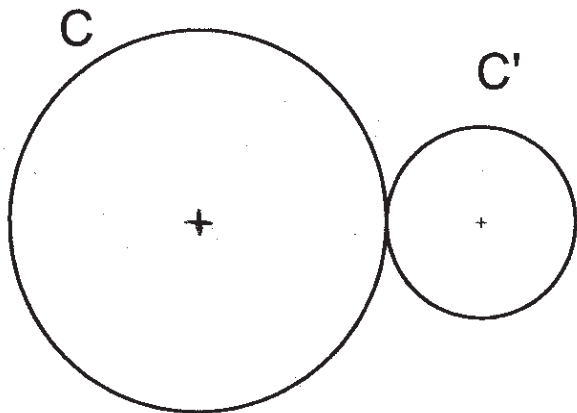


EJERCICIO PROPUESTOS

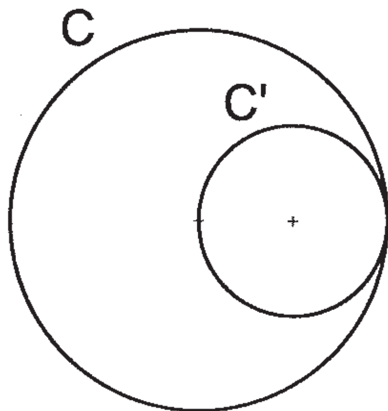
1. Dados los puntos A y B y la recta r, hallar en esta recta un punto P tal que la suma PA + PB tenga un valor mínimo.



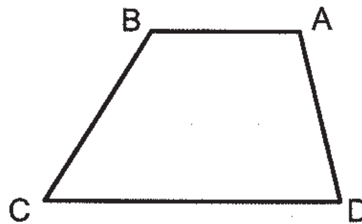
2. Las circunferencias C y C' son tangentes exteriormente y el radio de una es el doble que el de la otra. Existe una homotecia directa (K>0) de centro O y razón K que transforma C en C' y otra inversa (K<0) de centro O' razón K' que realiza la mismo función. Dibujar sobre la figura los puntos O y O' y dar los valores de K y K'.



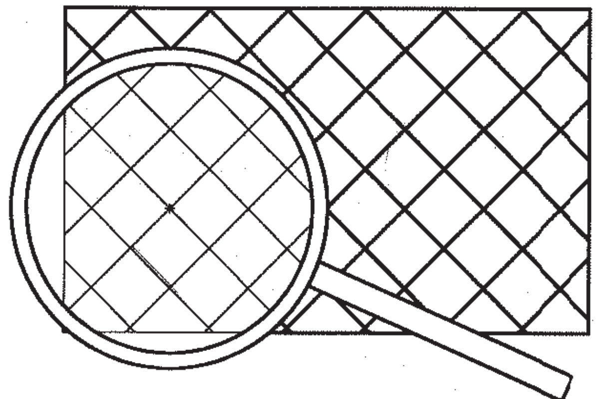
3. Dadas las circunferencias C y C' de la figura, construir los posibles centros de homotecia que transforman C en C' e indicar las correspondientes razones de homotecia.



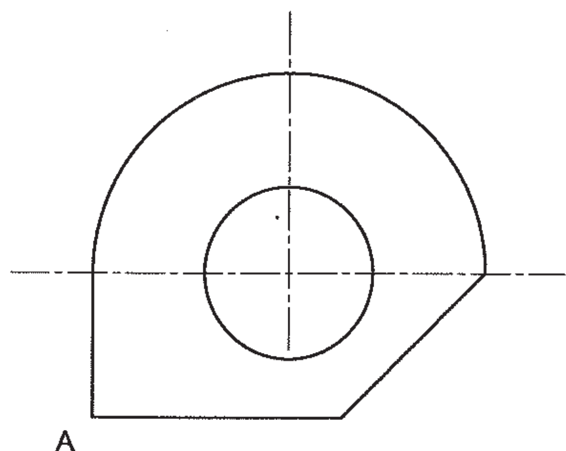
4. Dibujar la figura transformada del trapecio ABCD mediante una homotecia de razón -3/2. Se conoce el transformado A' del punto A.



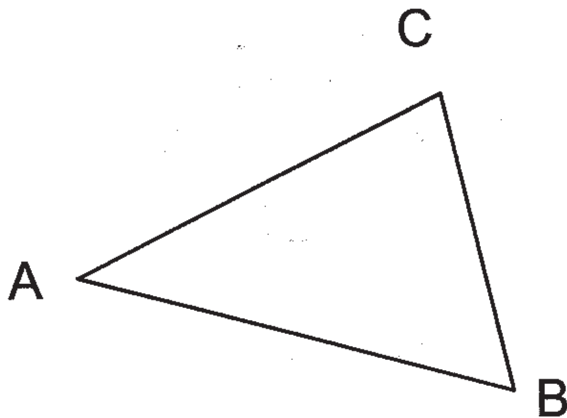
5. Una lupa está situada sobre un mosaico regular del modo que se muestra en la figura. Completa el dibujo añadiendo las formas que se ven a su través, sabiendo que en ella se producen 2 aumentos en su área.



6. Construir una figura semejante a la dada pero que tenga el doble de área.



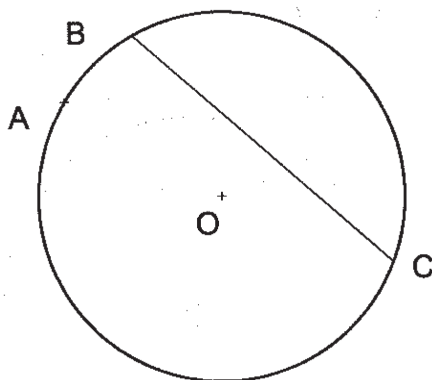
7. Dado un triángulo ABC, construir el triángulo homotético A'B'C' de superficie la cuarta parte de la superficie del primero, siendo centro de homotecia el baricentro G.



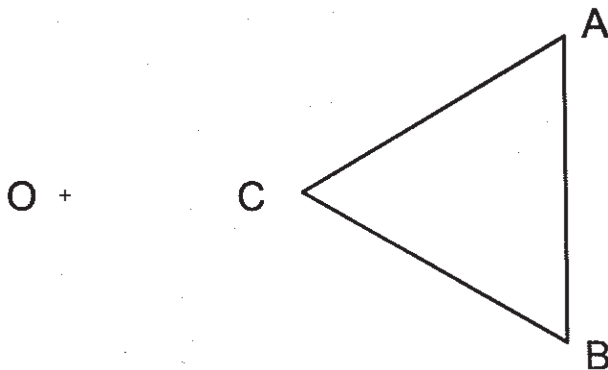
8. Nos dan una circunferencia, un punto A de la misma y una cuerda BC. Se pide:

a) trazar la circunferencia homotética de la dada con centro de homotecia en A y razón k = 1/2.

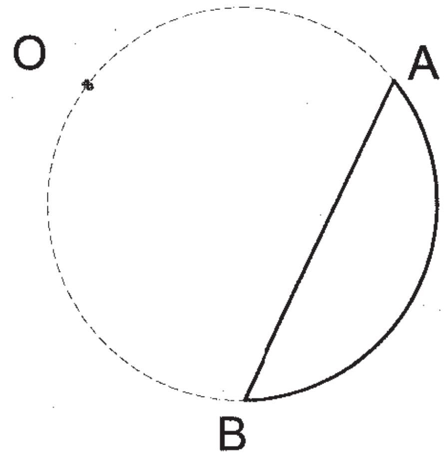
b) Dibujar las cuerdas que pasen por A y sean cortadas por BC en su punto medio.



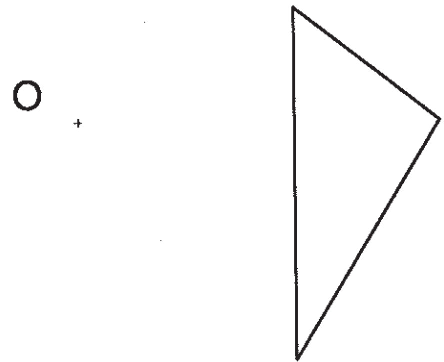
9. Hallar la figura inversa del triángulo ABC respecto de O, siendo A inverso de sí mismo.



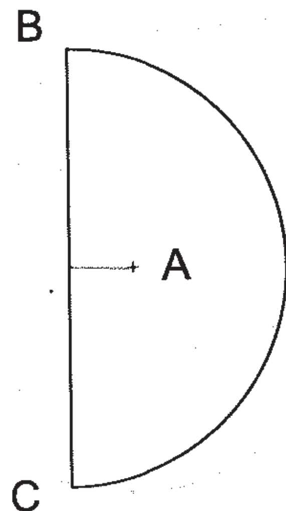
10. Hallar la figura inversa respecto de O del segmento circular dado, sabiendo que A es inverso de sí mismo.



11. Hallar la figura inversa de la dada respecto de O. Potencia de inversión: K= -9 cm x cm.

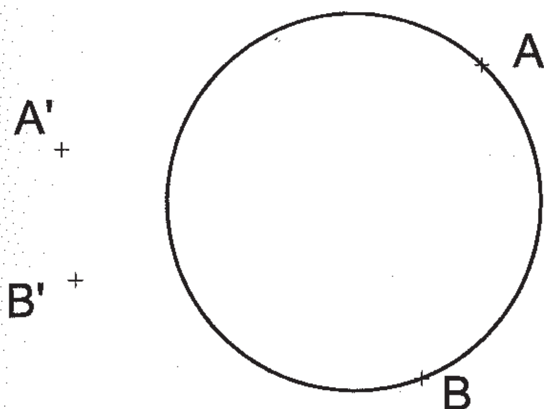


12. Figura inversa de la dada, siendo A el centro de la inversión y B y C inversos de sí mismos.



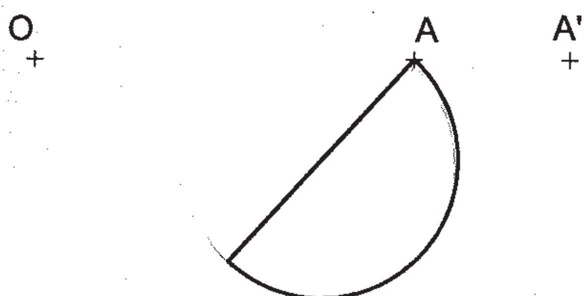
to

13. Hallar la figura inversa de la circunferencia dada, conociendo los inversos de dos de sus puntos.



).

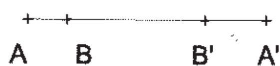
14. Hallar la figura inversa de la dada respecto de O, sabiendo que A' es el inverso de A.



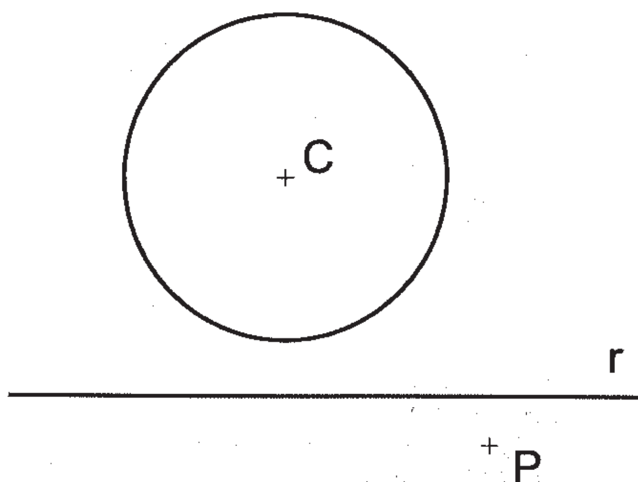
la

15. Considérese un rectángulo OABC en el que CB = 2AB. Hallar la figura inversa del triángulo ABC si el centro de inversión es O y el punto B es inverso de sí mismo.

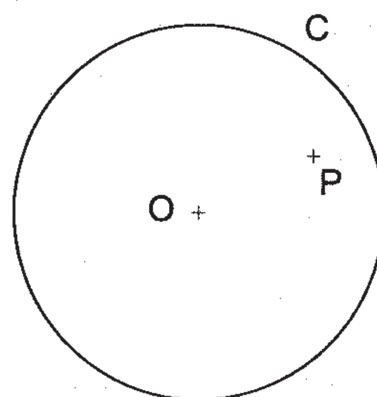
16. Hallar el centro de la inversión que transforma A en A' y B en B'.



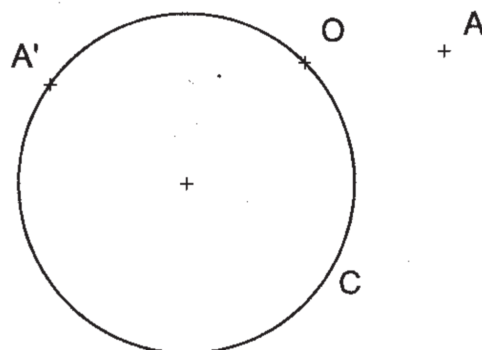
17. En una inversión positiva definida por la circunferencia C y la recta r, hallar la figura inversa del punto P.



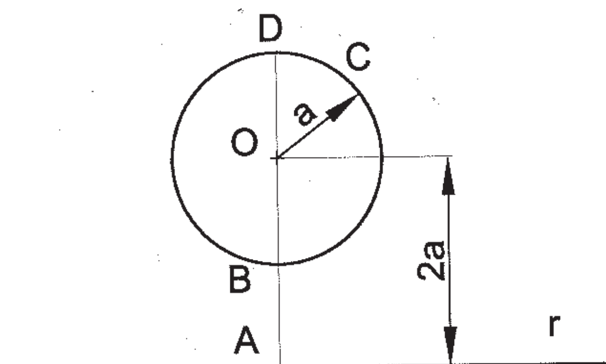
18. En una inversión de potencia negativa, cada punto de la circunferencia C se trasforma en su diametralmente opuesto. Hallar el inverso del punto P.



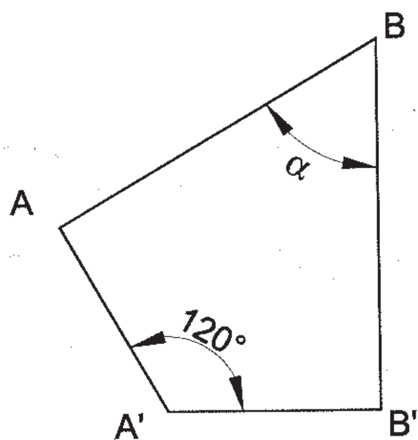
19. Si los puntos A y A' son homólogos en una inversión de centro O, dibujar la inversa de la circunferencia C.



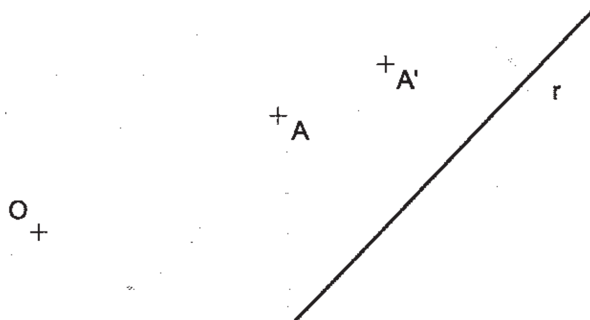
20. Dada la circunferencia C y la recta r de la figura, en la que se verifica que AB = BO = OD = a, indicar cuáles son los posibles centros de inversión que transforman C en r y cuáles serían las correspondientes potencias de inversión.



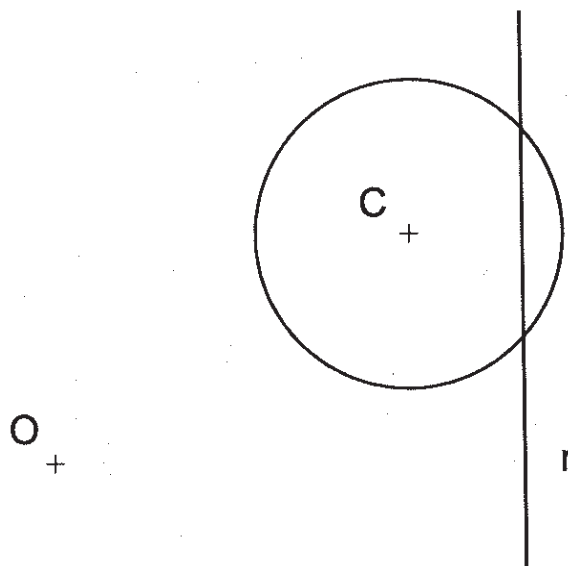
21. Dado el cuadrilátero AA'B'B de la figura, cuyo ángulo AA'B' vale 120°, ¿cuánto ha de valer el ángulo B para que las parejas de puntos (A, A') y (B, B') sean parejas de homólogas en una inversión?



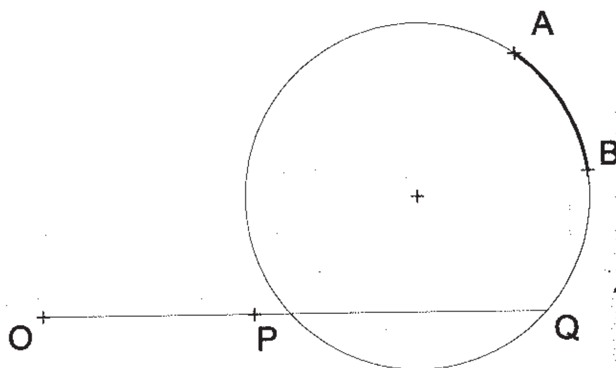
22. En la inversión definida por el centro de inversión O y una pareja de puntos inversos A y A', hallar la figura inversa de la recta r.



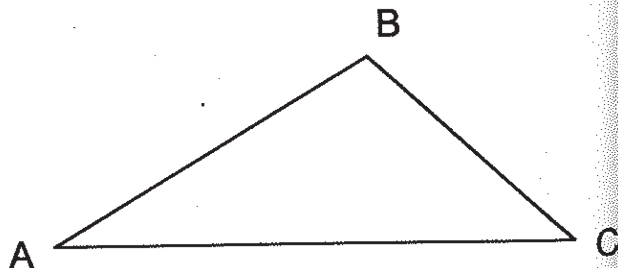
23. Hallar la inversa de la recta r en una inversión de centro O y potencia de inversión la potencia que el punto O tiene respecto a la circunferencia C.



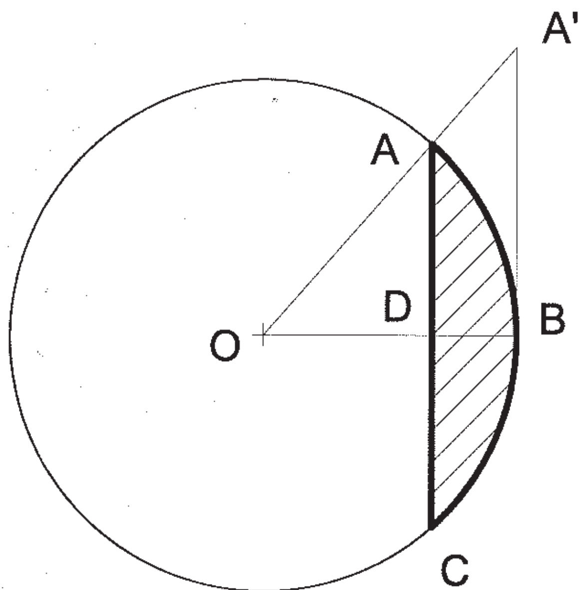
24. En una inversión de centro O y potencia positiva K=OP·OQ, hallar el inverso del arco AB.



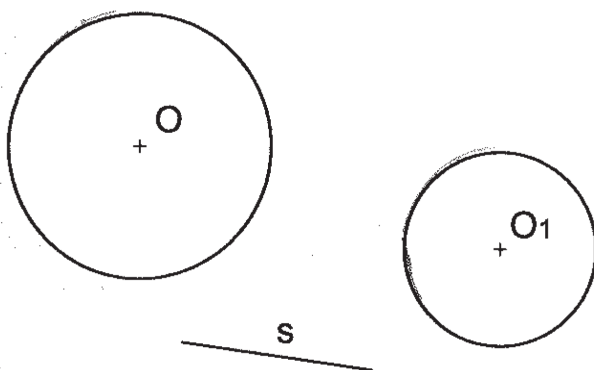
25. Determinar un punto M sobre el lado AC del triángulo, tal que AB^2=AM·AC.



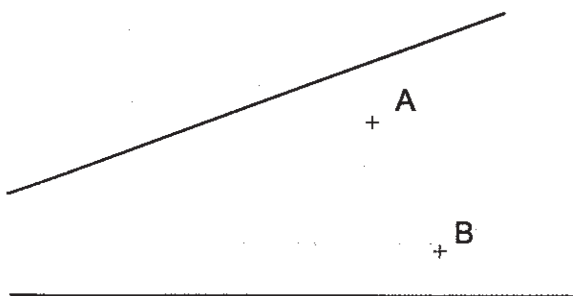
26. Determinar la figura A'B'C'D', inversa de la ABCD dada, en una inversión de centro O que convierte el punto A en el A'



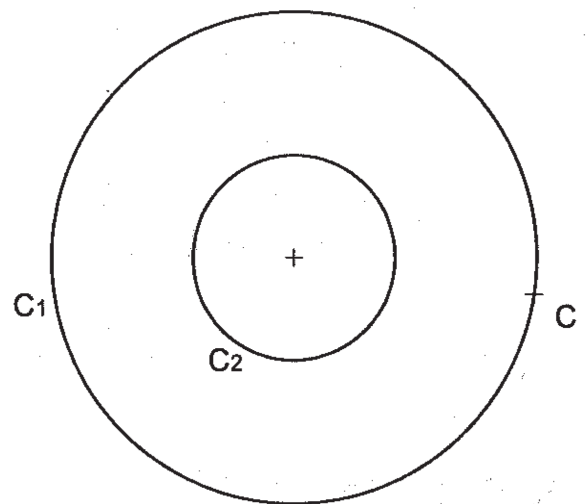
27. Dibujar los posibles segmentos iguales y paralelos al segmento s, de modo que sus extremos estén en las circunferencias de centros O y O_1.



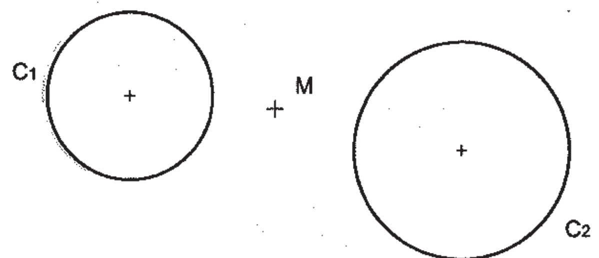
28. Dadas las rectas r y s que se cortan fuera de los límites del papel, trazar por los puntos A y B dos rectas que pasen por el punto de corte de r y s.



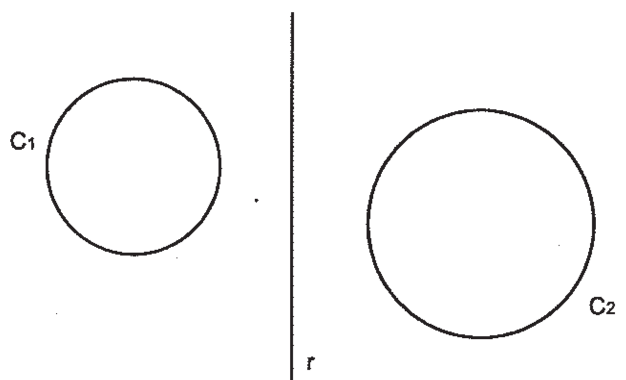
29. Se pide construir un triángulo equilátero cuyo vértice A pertenezca a la circunferencia C_1, el B pertenezca a la C_2 y el vértice C está fijado.



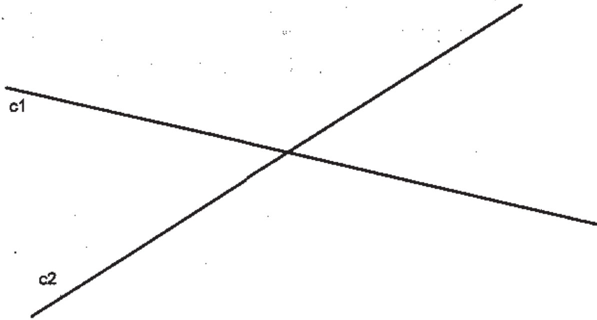
30. Se pide dibujar un segmento con su punto medio en M, y cuyos extremos se encuentren en las circunferencias C_1 y C_2.



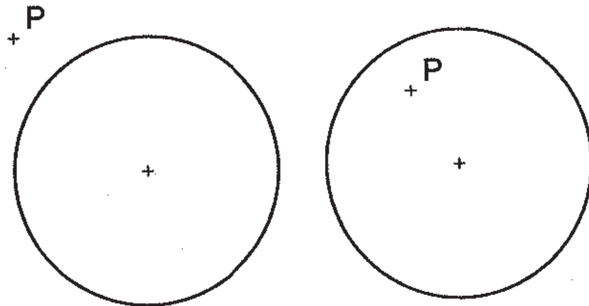
31. Se pide dibujar un segmento perpendicular a la recta r, con su centro perteneciente también a la recta r, cuyos extremos se encuentren en las circunferencias C_1 y C_2.



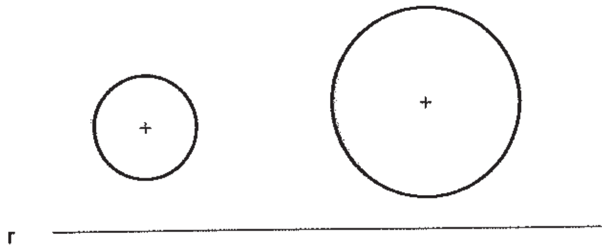
32) Tres repetidores de telefonía móvil tienen un alcance que se puede representar en el plano por 1 cm. Para su correcto mantenimiento, se deben situar al borde de las carreteras c_1 y c_2. Buscar su emplazamiento óptimo, para que haya comunicación entre los tres de forma indistinta.



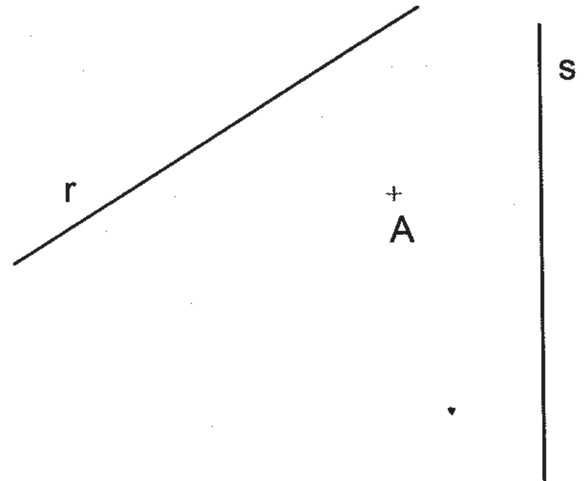
33. Trazar por P un segmento que corte a la circunferencia en dos puntos A y B tales que PA=2·PB, en los dos casos dados: con P fuera y dentro de la circunferencia.



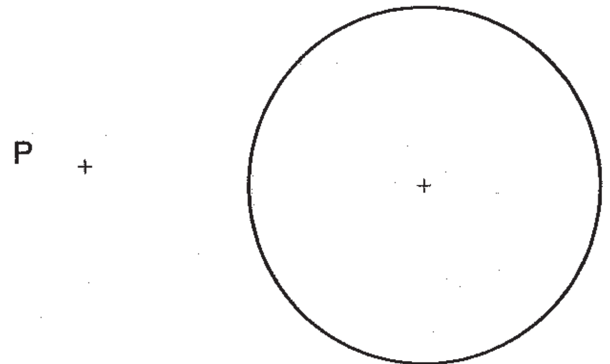
34) Hallar un punto M de la recta r tal que las tangentes desde él a las dos circunferencias formen igual ángulo con r



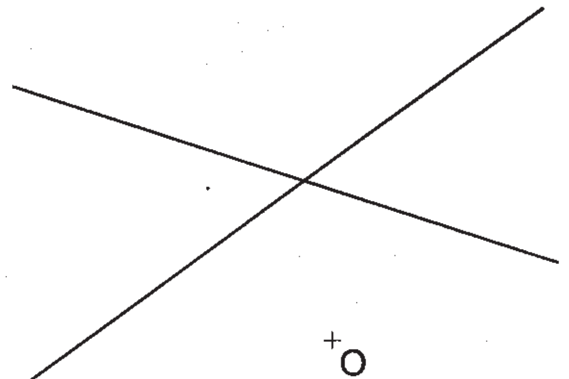
35. En un estudio de la iluminación del objeto A y su sombra sobre la pantalla s, la lámpara se puede mover a lo largo del carril r. Determinar en qué posición de la lámpara el objeto A está en el punto medio entre la lámpara y su sombra.



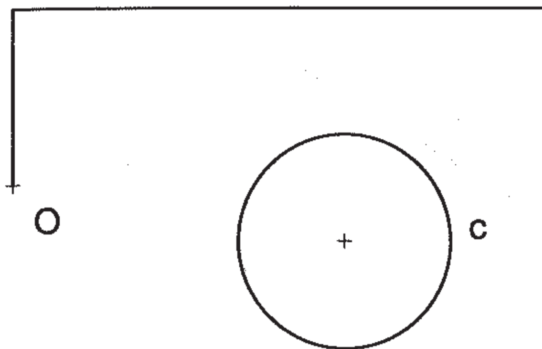
36) Trazar por P las rectas que corten a la circunferencia en segmentos de longitud 2 cm.



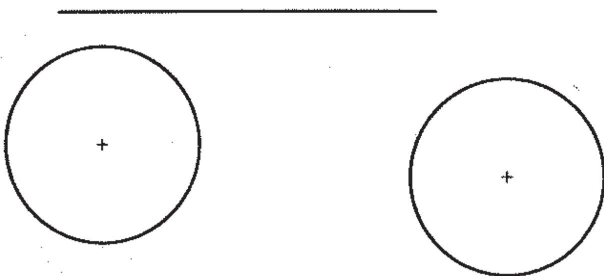
37) Un parque acuático va a tener forma de hexágono regular, centrado en el pozo O. Se quiere que tenga acceso por las dos carreteras. Dibujarlo en el plano.



38. La pieza dada gira alrededor de O. Indicar qué ángulo puede girar hasta tocar con el cilindro c.



39. Un mecanismo se compone de dos ruedas iguales, que giran alrededor de sus centros, y están unidas en sus bordes por una biela de longitud dada, articulada en sus extremos. Determinar en qué posición la biela está horizontal.



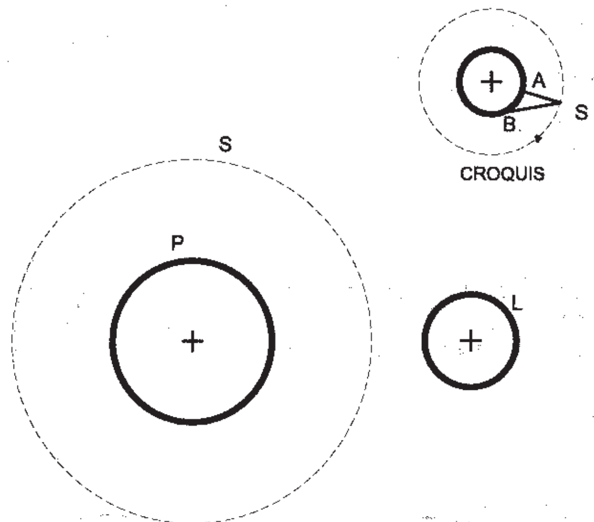
40. En un mapa a escala E= 1: 50.000, en el que se conocen las poblaciones de las ciudades A y B representadas, se pretenden localizar las posiciones C y D que responden a los siguientes datos:

- la distancia entre C y D es de 1'5 km
- desde C y desde D se ven A y B bajo ángulos de 90°
- desde un cierto punto alineado con A-B y con C-D se ven ambas alineaciones formando un ángulo de 30°.

Hallar las posiciones de C y D.

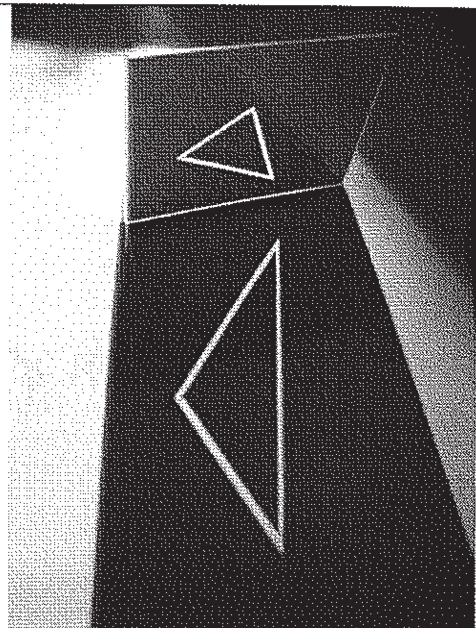


41. Un satélite artificial S gira alrededor de un planeta P, y envía señales en forma de pulsos. Esas señales llegan primero al punto A más cercano de la superficie (ver croquis), y con cierto retraso a los demás puntos, debido a su mayor distancia. Esas señales también llegan a la luna L. En un estudio sobre la distancia entre el Planeta y la Luna se necesita saber la posición del satélite S en la que se captan en el planeta y en la luna a la vez las señales con menor retraso (posición A en el planeta y en la luna) y las señales con mayor retraso (posición B en el planeta y en la luna). (Explicación razonada)



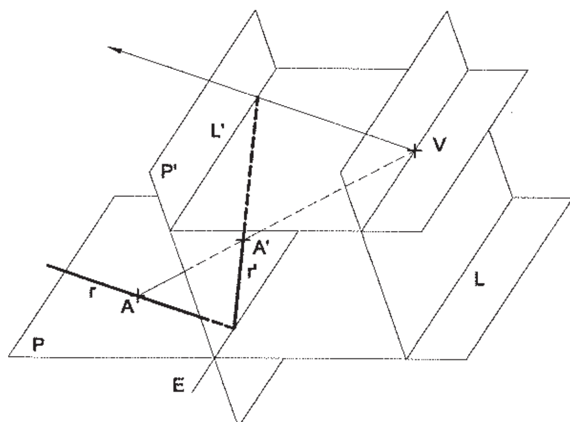
TEMA 6

HOMOLOGÍA



1. PERSPECTIVIDAD ENTRE DOS PLANOS

Dados dos planos P y P', y un punto V que no pertenece a ellos, se establece una correspondencia entre los puntos de dichos planos de la siguiente forma: al punto A le corresponde el A', hallado como intersección de la recta VA con el plano P'. Esta correspondencia se dice que establece una perspectividad entre los dos planos. Al punto A' se le llama homólogo de A.



Esta correspondencia tiene estas propiedades:

- Los homólogos de los puntos que están en el infinito de P son los puntos de la recta L' (recta límite). A su vez, los puntos homólogos de la recta L están en el infinito.
- La recta E es doble, es decir, su homóloga es ella mismo. Se llama eje de la perspectividad.
- Una recta r y su homóloga r' se cortan en el eje.
- Dos puntos homólogos siempre están alineados con V.

2. HOMOLOGÍA PLANA

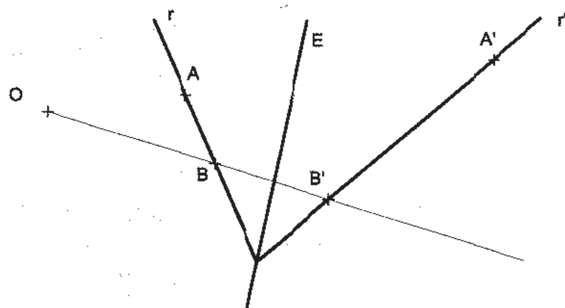
Si todo lo anterior lo proyectamos cilíndricamente sobre un tercer plano, tenemos una homología plana, que se podría definir como una correspondencia de los puntos del plano en sí mismos de tal forma que cumpla estas dos propiedades:

- Dos puntos homólogos están siempre alineados con un punto fijo O llamado centro de homología
- Los pares de rectas homólogas se cortan en puntos de una recta fija llamada eje de homología

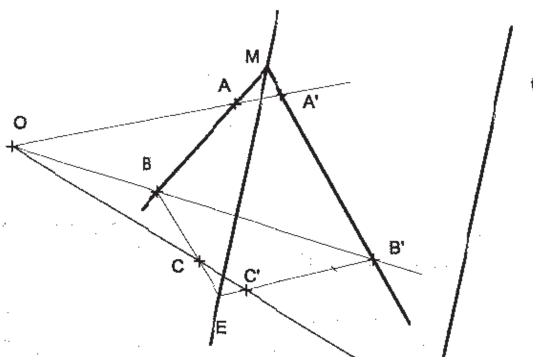
Una homología queda definida por su centro, el eje y un par de puntos homólogos, o también por dos pares de puntos homólogos, y la dirección del eje.

Si A' es el homólogo de A, el homólogo del A' no es el A.

Definida una homología por su centro O, su eje E y un par de puntos homólogos A-A', para hallar el homólogo de un punto cualquiera B tenemos en cuenta que el homólogo B' debe estar en la recta que pasa por O y B. Además, si cogemos la recta r que paso por A y B, su homóloga r' pasará por A' y B' y cortará a r en un punto del eje. Con estas dos condiciones podemos hallar B'.



Si la homología está definida sabiendo que A' es homólogo de A y B' lo es de B, y que el eje de homología es paralelo a la recta t, el centro de la homología debe estar alineado con A-A' y con B-B'. Por tanto será la intersección de esos dos rectas.



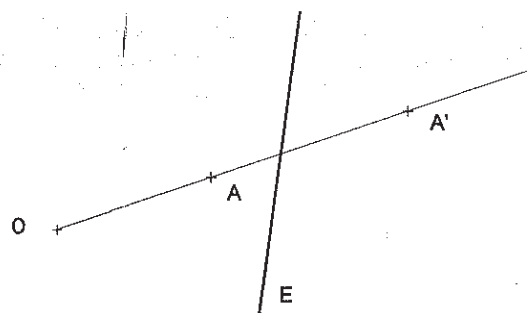
Para hallar el eje sabemos que la recta AB corta a su homóloga A'B' en un punto M del eje. Por ese punto, por tanto, trazamos el eje paralelo a la recta dada t.

3. RECTAS LÍMITE L Y L'

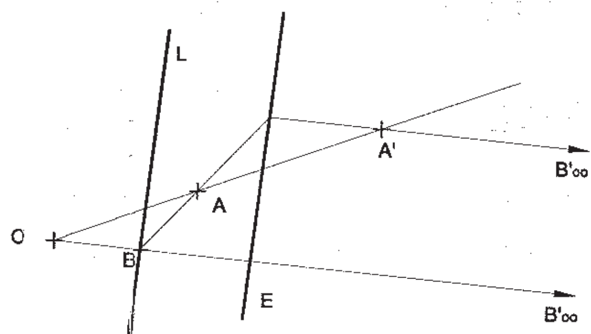
Se llama recta límite L al lugar geométrico de los puntos que tienen sus homólogos en el infinito. Existe otra recta límite L´ que contiene a los puntos que son homólogos del infinito. Por tanto, los puntos de L tienen homólogos en el infinito mientras que los de L´ son homólogos del infinito.

Las dos rectas son paralelas al eje, y evidentemente L´ no es homóloga de L.

Veamos cómo hallar L en una homología definida por el centro O, el eje E y dos puntos homólogos A, A´.

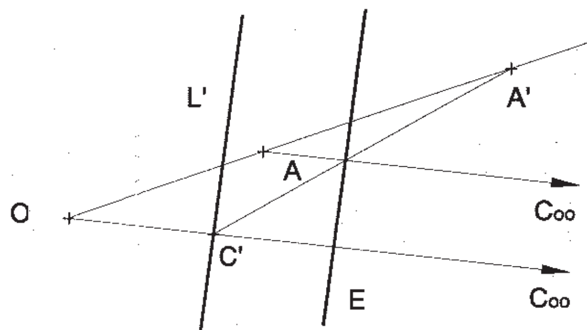


Necesitamos hallar un punto B cuyo homólogo esté en el infinito. Cogemos un punto cualquiera del infinito B'_∞, y lo unimos con O. En esa recta estará B.



Por otra parte, aplicando la segunda propiedad de la homología, unimos B'_∞ con A´, es decir, trazamos la paralela a O B'_∞ por A' hasta que corte al eje, y desde allí lo unimos con A. En esa recta estará B. Por tanto, B será la intersección de las dos rectas. Por último, la recta límite L pasa por B y es paralela al eje.

Para obtener L' en una homología definida como en el caso anterior, necesitamos el homólogo C' de un punto del infinito C_∞. Cogemos un punto cualquiera que esté en el infinito, C_∞ y lo unimos con O. En esa recta estará el homólogo C'.

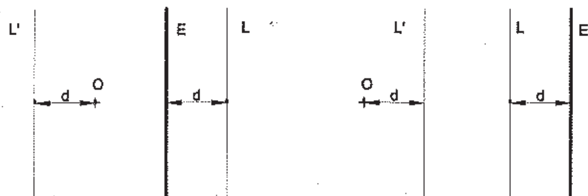


Por otra parte, y como en el caso anterior, unimos C_∞ con A hasta que corte al eje y desde allí unimos con A': en esa recta estará C'. Por tanto, C' es la intersección de las dos rectas.

Por último, por ese punto C' trazamos una paralela al eje E que es la recta L' buscada.

Las rectas límite L y L' tienen dos propiedades: que están siempre o las dos dentro del espacio entre el eje E y O, o las

dos fuera, y además la distancia de una de ellas a O es igual que la de la otra al eje E. Por tanto, conocida una de ellas, la otra se puede trazar fácilmente con estas propiedades.

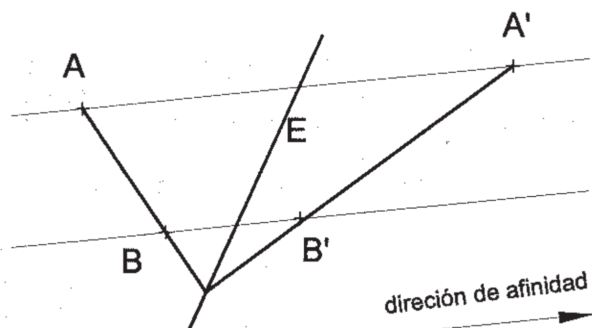


Vamos a estudiar ahora dos casos particulares de la homología: la afinidad y la homotecia.

4. AFINIDAD

Es una homología en la que el centro O está en el infinito. En ese caso dos puntos afines A y A' están alineados con la llamada dirección de afinidad, que junto al eje, define a la transformación geométrica.

En la afinidad no hay rectas limite.



5. HOMOTECIA

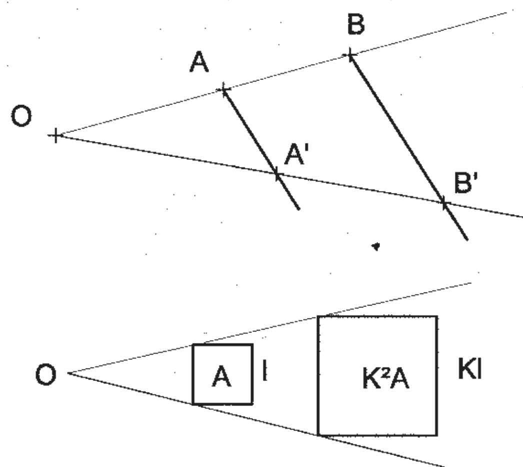
Es una homología en la que el eje está en el infinito. Por tanto la segunda propiedad de la homología se traduce en que una recta y su homóloga son paralelas. Como la recta AB es paralela a A'B', los triángulos OAB y O'A'B' son semejantes, por lo que

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=K$$

A esa constante se la llama constante de homotecia. Puede ser negativa, con lo que los puntos homólogos estarían al otro lado de O.

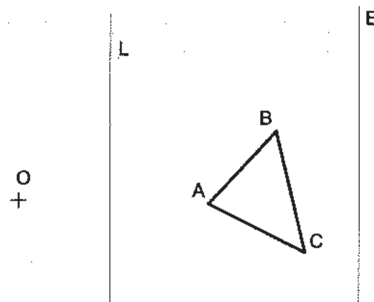
Transforma una recta en otra paralela. Por ello conserva los ángulos, es decir, es una transformación conforme.

Transforma una figura en otra proporcional, con una relación de áreas de K^2.



EJERCICIO RESUELTO 1

Dibujar la figura homóloga de la figura dado.

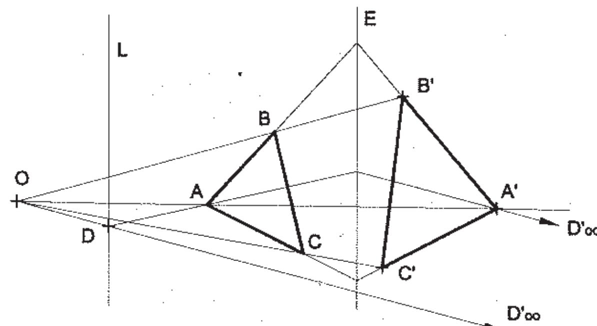


Cogemos un punto D de la recta límite, que tendrá su homólogo D'_∞ alineado con OD y en el infinito.

El homólogo de A estará en la recta OA. Por otra parte, unimos D con A, y el punto de corte con el eje lo unimos con D'_∞, es decir, trazamos paralela a OD'_∞. En esa recta estará A', por lo que este punto será la intersección de las dos rectas.

Como el eje es el lugar geométrico de los puntos homólogos de sí mismos, la prolongación de la recta AB determinará en el eje un punto doble, que unido con A' será la recta homóloga de AB, donde se encontrará el vértice B'. Este punto también estará alineado con OB.

El inverso de C se hace de la misma forma que con B.



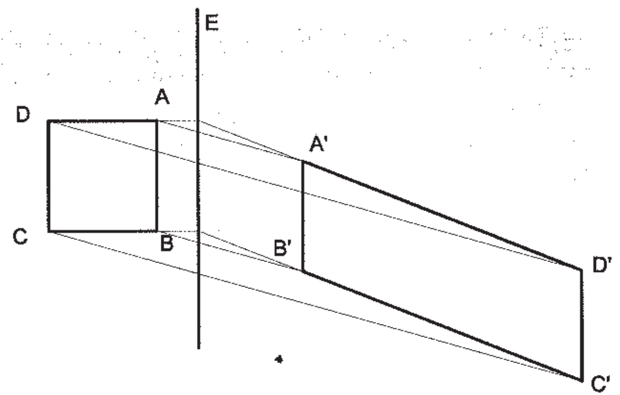
EJERCICIO RESUELTO 2

En una afinidad de eje E, A' es el punto afín de A. Dibujar la figura afín del cuadrado ABCD.

La recta AA' es la dirección de afinidad. Por tanto B', C' y D' estarán en las rectas paralelas a ella trazadas desde B, C y D respectivamente.

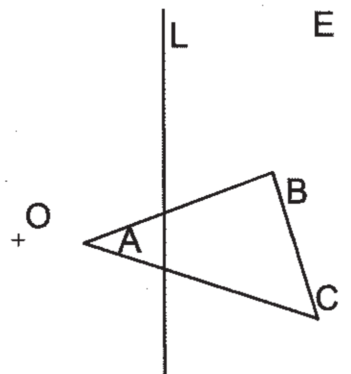
Por otra parte, si trazamos la recta AD, cortará a la A'D' en un punto del eje. Con estas dos condiciones hallamos los puntos afines de los otros vértices.

Se observa que la recta AB, al ser paralela al eje de afinidad, tiene a A'B' también paralela al eje

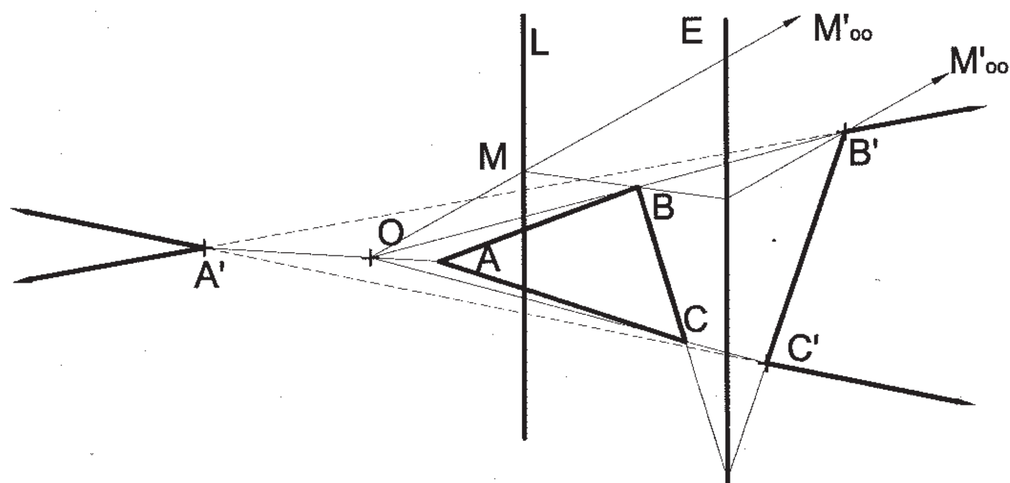


EJERCICIO RESUELTO 3

Dibujar la figura homóloga de la dada, que corta a L.

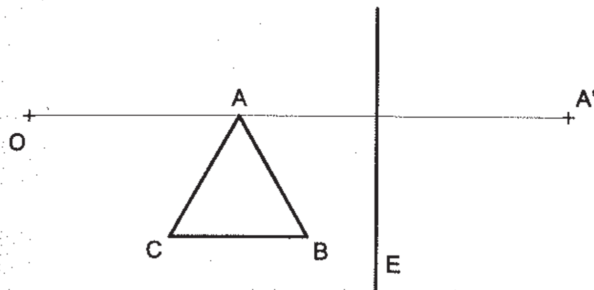


Cogemos un punto M de la recta límite L, que tendrá su homólogo en M'_∞, que está "al final" de la recta OM.
El homólogo del B estará en la recta OB. Si prolongamos MB hasta que corte al eje, y desde ese punto unimos con M'_∞ (es decir, trazamos paralela a O- M'_∞), el punto de corte será B'.
El homólogo del punto C estará en la recta OC. Además sabemos que la recta BC y la B'C' se cortan en el eje E.
El punto A' estará en la recta OA. Y si prolongamos AC hasta que corte al eje E, y ese punto lo unimos con C', en esa recta también estará A'. El punto homólogo del A sale a la izquierda de O, ya que la recta L corta a la figura.
Eso quiere decir que como el segmento AB corta a L, su segmento homólogo A'B' "pasará" por el infinito, es decir hay que unir A' con B' "pasando" por el infinito. Lo mismo ocurre con el segmento AC.

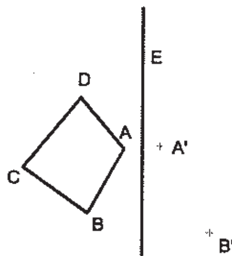


EJERCICIOS PROPUESTOS

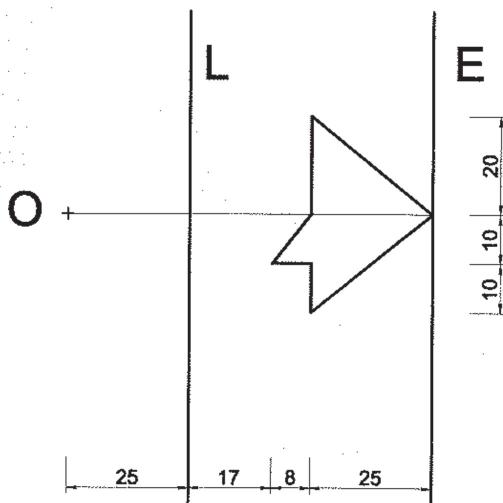
1. Determinar el homólogo del triángulo equilátero dado, en una homología de centro O, eje E y siendo A' el homólogo de A.



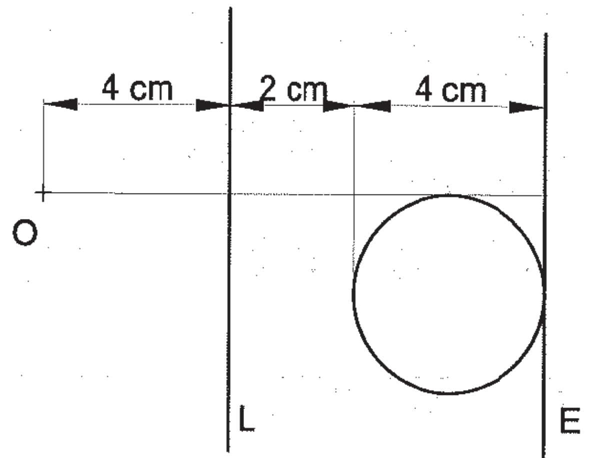
2. Hallar la figura homóloga de ABCD, dados el eje y un par de puntos homólogos.



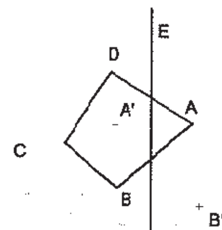
3. En una homología, dados el centro O, la recta límite L y el eje E, hallar la figura homóloga del polígono dado. Medidas en mm.



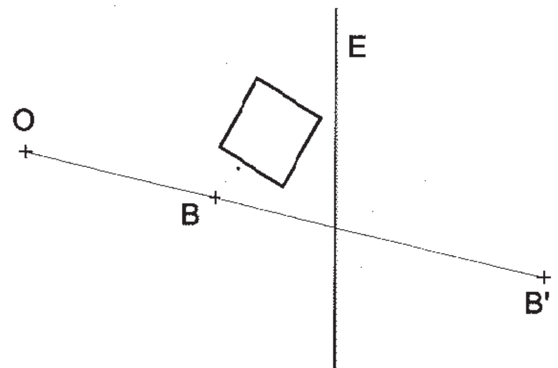
4. En una homología de centro O, eje E y recta límite L, hallar la figura homóloga de la circunferencia dada.



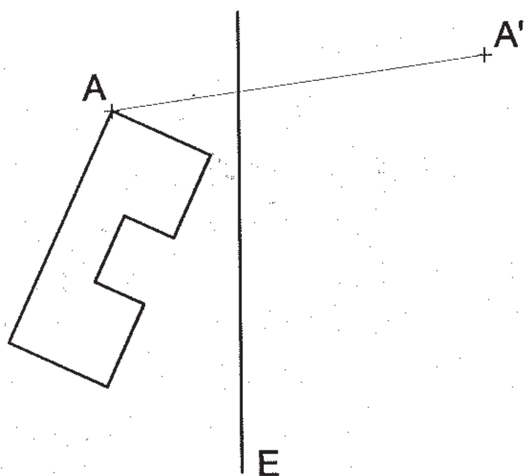
5. Hallar la figura homóloga de la dada, conocidos el eje y dos pares de puntos homólogos.



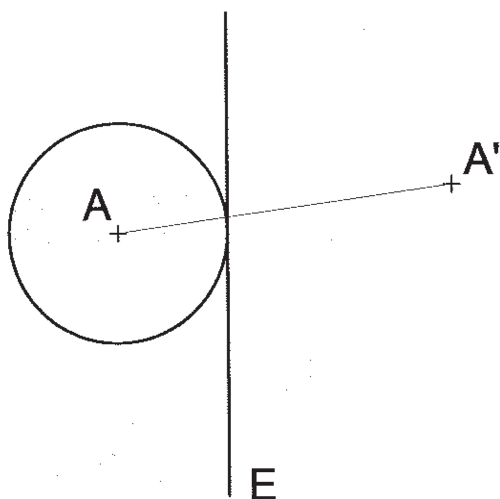
6. Hallar la figura homóloga del cuadrado dado, sabiendo que el punto B' es el homólogo del B.



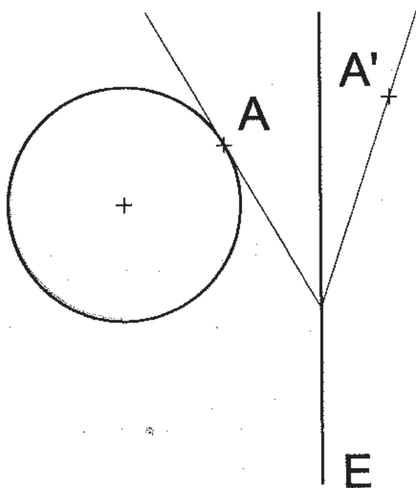
7. Dada una afinidad por su eje y dos puntos afines A-A', se pide obtener la figura afín de la dada.



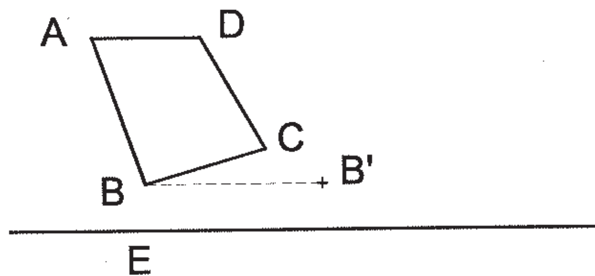
8. Hallar la figura afín de la circunferencia dada, sabiendo que el punto afín de su centro es el A'.



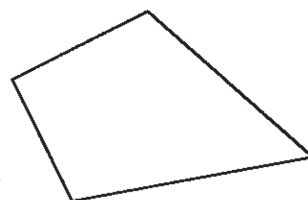
9. Determinar la figura afín de la circunferencia dada.



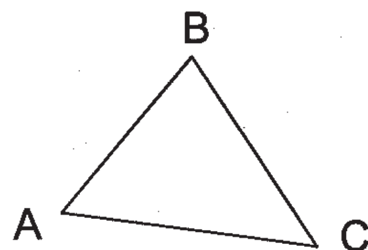
10. Trazar la figura afín de la dada, con los datos que se indican.



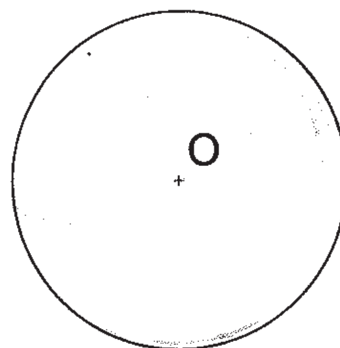
11. Hallar el cuadrilátero homotético del dado, siendo O el centro y K =- 1/2su razón de homotecia.



12. Teniendo una homología afín definida por su eje e y un par de puntos homólogos P y P', hallar el triángulo transformado del ABC.



13. Dibujar la figura homotética de la circunferencia dada, siendo O el centro de la homotecia y su área la mitad de la del círculo conocido.



$A = \pi r^2$

TEMA 7

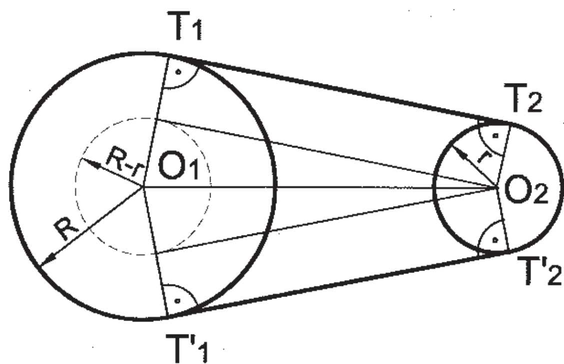
TANGENCIAS EN EL PLANO



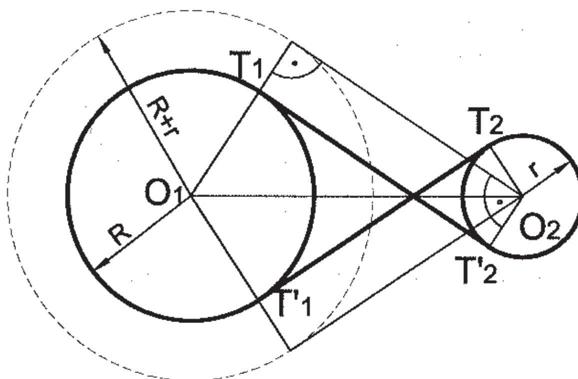
1. RECTAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS

Si las circunferencias no se cortan, hay dos pares de rectas tangentes a ambas circunferencias: las dos **tangentes exteriores**, y las dos **tangentes interiores**. Estas últimas se cortan entre sí en el espacio que hay entre las dos circunferencias.

Para dibujar las tangentes exteriores, observamos que si las trasladamos ortogonalmente a sí mismas el radio r, pasan por O_2. Por tanto se dibuja con centro en O_1 una circunferencia auxiliar de radio R-r, y desde O_2 se trazan las dos rectas tangentes a la circunferencia auxiliar, que nos darán las direcciones de las tangentes buscadas. Si desde los dos centros se trazan perpendiculares a esas direcciones, obtenemos los puntos de tangencia T_1, T_2, T'_1, T'_2



Para dibujar las tangentes interiores, se hace igual que en el caso anterior, pero tomando como circunferencia auxiliar la de radio R + r.

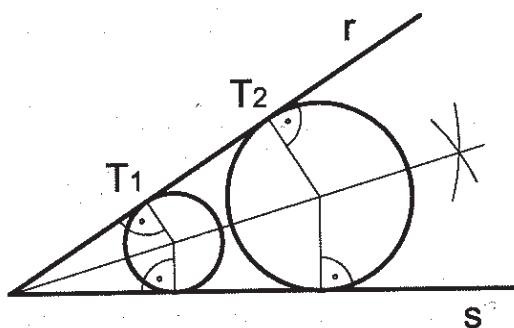


Si las dos circunferencias se cortaran, no existirían rectas tangentes interiores. Y si una circunferencia estuviera contenida en le otra, no habría ninguna recta tangente.

2. TRAZADO DE UNA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A DOS RECTAS

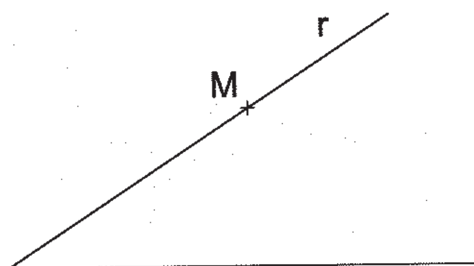
Dadas dos rectas, hay infinitas circunferencias tangentes a las dos. El centro es cualquier punto de la bisectriz, y el radio viene dado por la perpendicular desde el centro a una cualquiera de

las rectas, lo cual también nos determina el punto de tangencia.

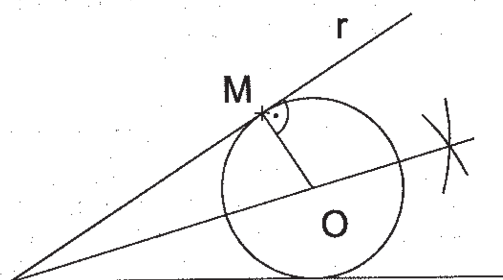


Circunferencia tangente a dos rectas en un punto dado M

Pasar por un punto es una restricción a las infinitas soluciones del caso anterior. Con ella hay sólo una solución.

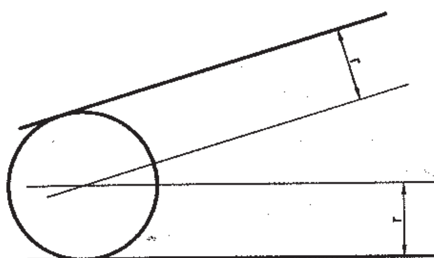


Por el punto M se traza un segmento perpendicular a la recta dada, que corta a la bisectriz en el centro de la circunferencia solución. El radio es la distancia OM.



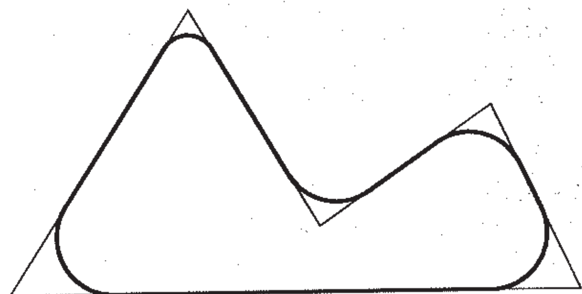
Circunferencia de radio dado r, tangente a dos rectas

Se trazan paralelas a las rectas a una distancia r. Donde se corten es el centro de la circunferencia pedida.

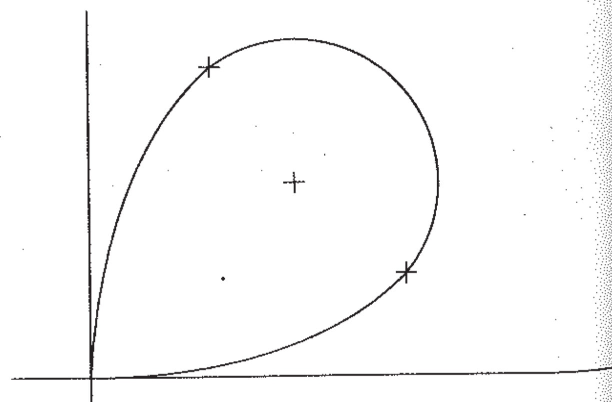


Truncamiento de vértices en polígonos

Con frecuencia, al diseñar una figura -por ejemplo, una pieza mecánica-, se parte de un polígono en el que se sustituyen los vértices por arcos de circunferencia tangentes a los lados, operación que se llama truncar vértices. Dependiendo de las necesidades del diseño, los arcos de circunferencias pueden ser de radio dado, tangente en un punto, etc. En esos casos se aplica lo visto anteriormente.



En el trazado de carreteras, para enlazar dos rectas antiguamente se usaba un simple arco de circunferencia, pero tenía el inconveniente de que el vehículo pasaba en un instante de una recta, que tiene radio de curvatura infinito, a una curva de radio de curvatura determinado, lo que obligaba a un giro brusco del volante. Con el aumento de las velocidades de los vehículos, la curva se dividió en tres tramos, con arcos de circunferencias tangentes entre sí pero de diferente radio. Así se conseguía que los giros del volante fueran menores, pero seguían siendo bruscos. En las autopistas actuales se usa una curva llamada clotoide que tiene un radio de curvatura inversamente proporcional a su longitud, es decir que según se avanza por ella el radio de curvatura es menor, lo que implica que hay que ir girando progresivamente el volante. En la zona central del enlace hay un arco de circunferencia de radio constante (el volante se mantiene girado un ángulo constante), y en la zona de salida de nuevo un tramo de clotoide va obligando a deshacer suavemente el giro del volante.

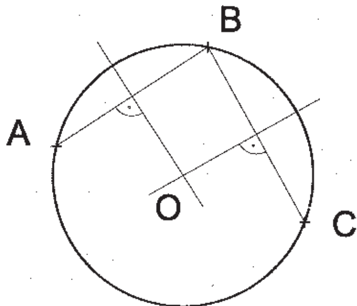


3. TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS A PARTIR DE TRES DATOS. PROBLEMAS DE APOLONIO

Para determinar una circunferencia se puede poner la condición de pasar por un punto (P), ser tangente a una recta (R) o ser tangente a otra circunferencia (C). Si nos dan tres condiciones de éstas, queda definida la circunferencia. Hay diez casos posibles, que fueron estudiados por el matemático griego Apolonio. Vamos a verlos:

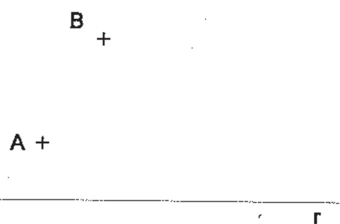
PPP

Tenemos tres puntos no alineados A, B y C, y queremos trazar una circunferencia que pase por ellos. Para ello basta hallar las mediatrices de dos de los segmentos determinados por los puntos. El punto de corte es el centro de la circunferencia, y el radio, la distancia de él a cualquiera de los puntos.

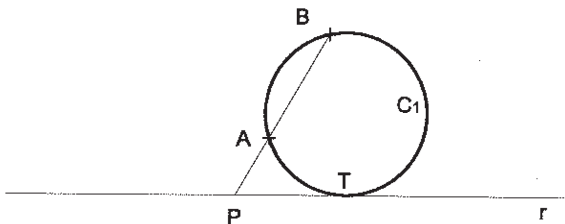


PPR

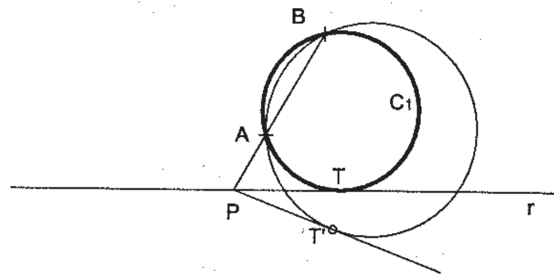
Se trata de dibujar una circunferencia que pase por A y B y sea tangente a la recta r.



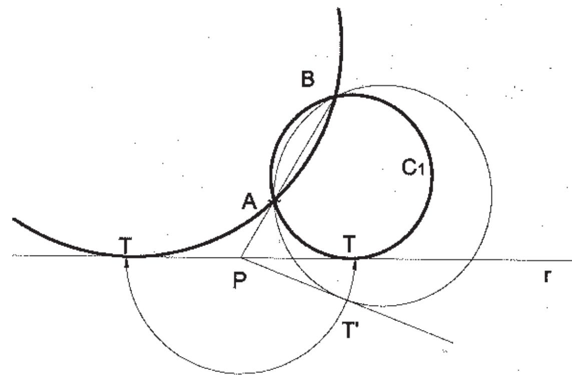
Vamos a hallar el punto de tangencia en la recta. Suponemos trazada la solución C_1. La recta que pasa por AB corta a r en P. Ese punto tiene una potencia respecto a la circunferencia de $PB \cdot PA- = PT^2$.



Si trazamos otra circunferencia cualquiera que pase por A y B, la potencia de P respecto a ella será también $PB \cdot PA = PT'^2$, por lo que PT' y PT son iguales.



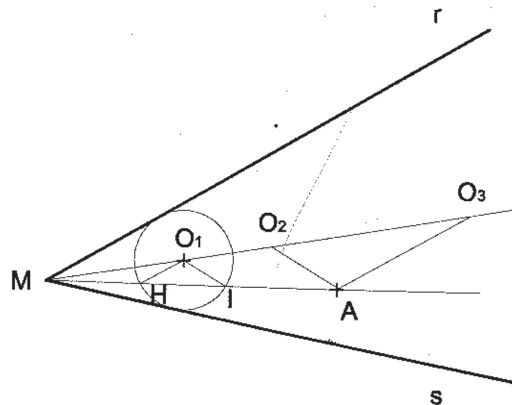
Por tanto, basta hallar PT' y llevarlo sobre r desde P, determinando el punto de tangencia T buscado. Se puede llevar a un lado y a otro, por lo que salen dos soluciones. El centro de las circunferencias solución estará en una perpendicular a r desde T, y en la mediatriz de AB.



Otra forma de hacerlo sería cogiendo una inversión con centro en A y K cualquiera. Se transforma B en B' y r en una circunferencia que pasa por A. Se hallan las dos tangentes desde B' a esa circunferencia que, deshecha la inversión, se transforman en las dos circunferencias pedidas.

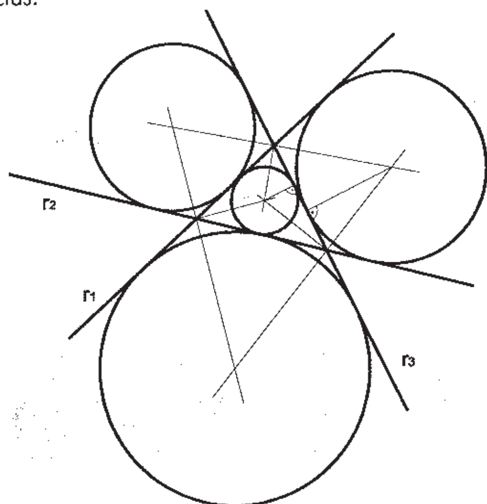
PRR

Nos dan las recta r y s y el punto A, y se trata como siempre de hallar la circunferencia que es tangente a las rectas y pasa por el punto. Tracemos una circunferencia auxiliar tangente a r y s, que tendrá el centro O_1 en la bisectriz. La circunferencia solución será homotética a ella, con centro de homotecia M. Si unimos A con M, los puntos de corte H e I con la circunferencia son los puntos homotéticos de A. Por tanto, trazando paralelas a HO_1 e IO_1 desde A, obtenemos los centros O_2 y O_3 de las circunferencias solución.



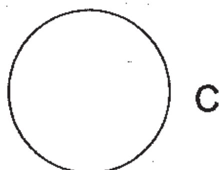
RRR

Los datos son las tres rectas r_1, r_2, r_3. Hay cuatro soluciones. Los centros se hallan como intersección de las bisectrices de los ángulos formados por las tres rectas. Los puntos de tangencia son los pies de las perpendiculares trazadas desde los centros a las rectas.



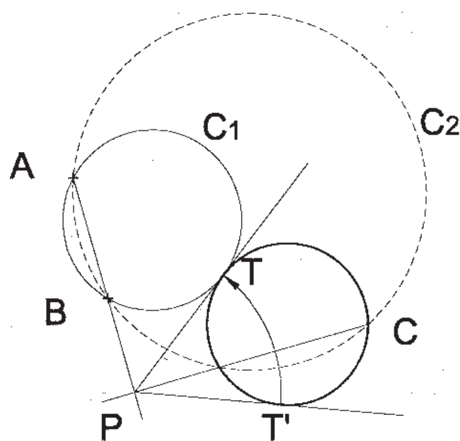
PPC

Veámoslo con un ejemplo. Los datos son:



Supongamos hallada la solución C_1. Si trazamos una circunferencia auxiliar C_2 que pase por A y B y corte a C, podemos hallamos el centro radical de las tres circunferencias C, C_1 y C_2. Por ese punto P pasa el eje radical de C_1 y C, que es la tangente común en el punto de tangencia T. Para todo esto no ha sido necesaria C, por lo que hallamos así T, y posteriormente la circunferencia solución, que pasa por tres puntos ABT.

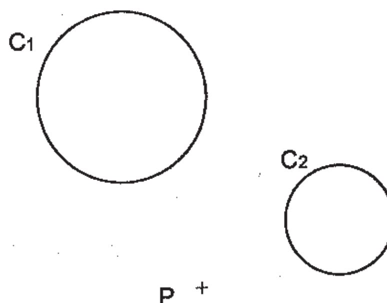
Como hay dos tangentes desde P a C, salen dos soluciones, una que pasa por T y otra que pasa por T'.



Otra forma de hacerlo sería cogiendo una inversión de centro A y K cualquiera; B se transforma en B', y C en otra C'. Se trazan las dos rectas tangentes desde B' a C' que, deshecha la inversión, se transforman en las dos circunferencias solución que pasan por A y B y son tangentes a C.

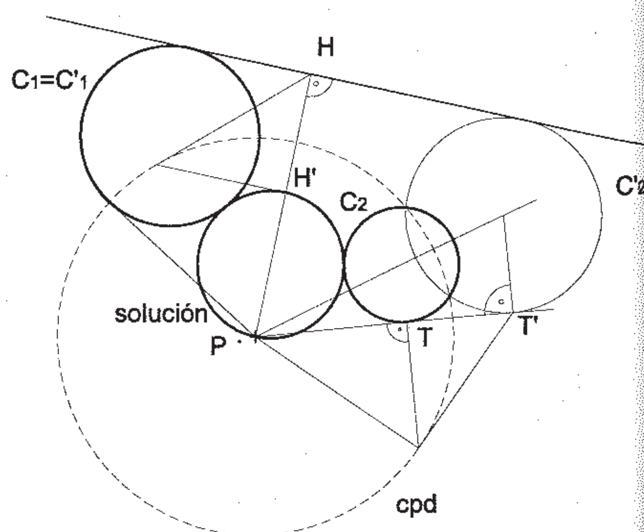
PCC

Tenemos como datos las circunferencias C_1 y C_2, y el punto P.



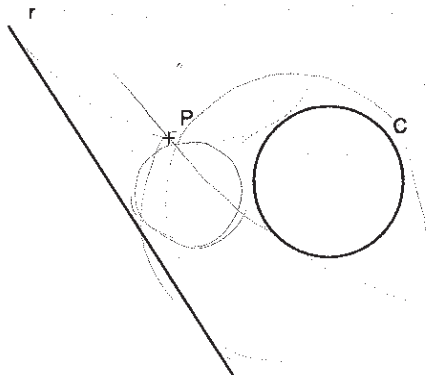
Para resolver este caso, se transforman C_1 y C_2 en una inversión de centro P y constante K cualquiera. Se obtienen otras dos circunferencias C'_1, y C'_2. Se hallan las cuatro rectas tangentes a ellas que, al deshacer la inversión, se convierten en las cuatro circunferencias solución que pasan por P y son tangentes a C_1 y C_2.

Si cogemos la inversión de tal forma que la cpd pase por los puntos de contacto de la tangente a C_1 (o a C_2) trazada desde P, esa circunferencia C_1 se transforma en ella misma, y es más fácil la construcción. En la figura sólo está dibujada una de las cuatro soluciones.

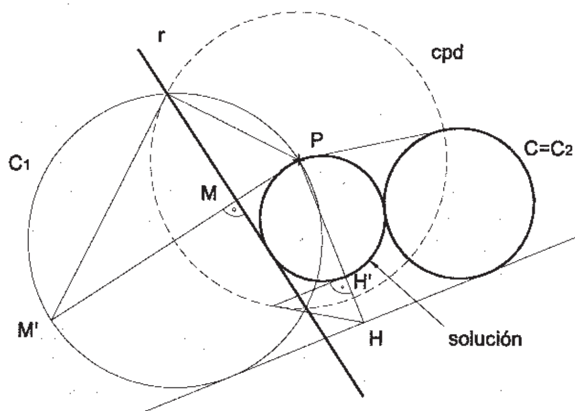


PRC

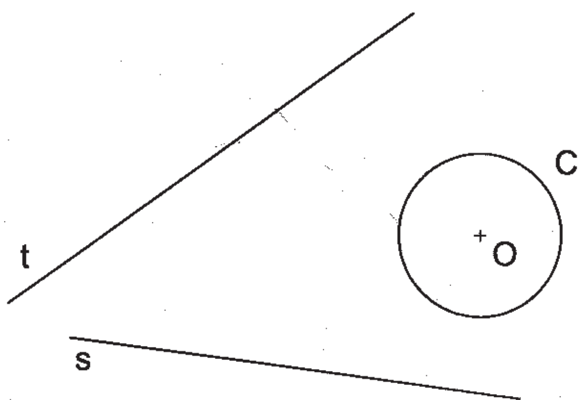
Los datos son los indicados en el dibujo.

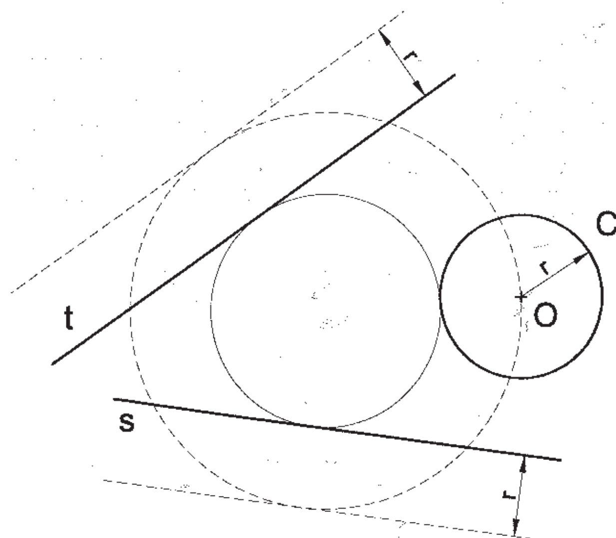


Se coge una inversión de centro P y K cualquiera; r se convierte en C_1 y C en C_2. Se hallan las cuatro rectas tangentes comunes que, deshecha la inversión, dan las cuatro circunferencias solución. En la figura está dibujada sólo una.



Los otros tres casos (RRC, RCC, CCC) son algo más complicados, pero se reducen a uno de los anteriores si se trasladan las rectas o las circunferencias datos una cantidad igual a uno de los radios. Por ejemplo, si tenemos el caso RRC, podemos trasladar las dos rectas una cantidad de r, y hallar la circunferencia que es tangente a esas dos rectas y que pasa por O (caso PRR). La solución final tiene el mismo centro y un radio igual al hallado menos r.

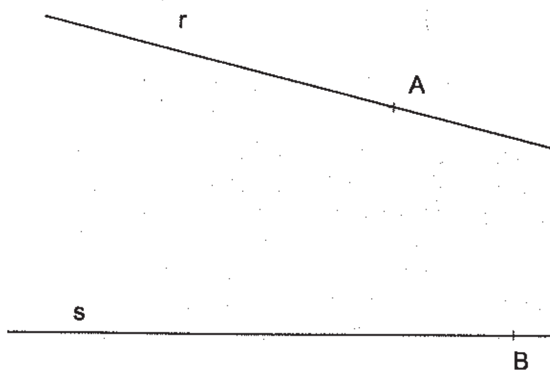




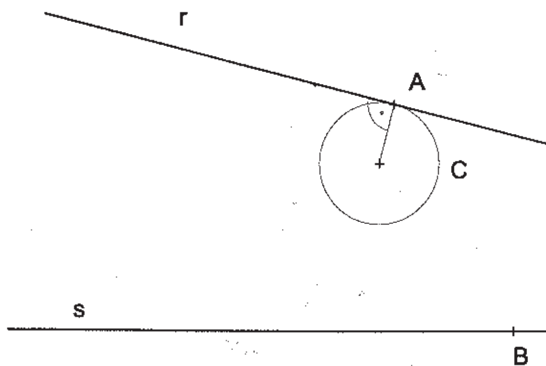
4. OTROS CASOS DE TANGENCIAS

Circunferencias tangentes a dos rectas en puntos dados y entre sí

Se trata de trazar una circunferencia tangente a r en el punto A, otra tangente a s en B, y que las dos sean tangentes entre sí. Con estos datos hay infinitas soluciones.

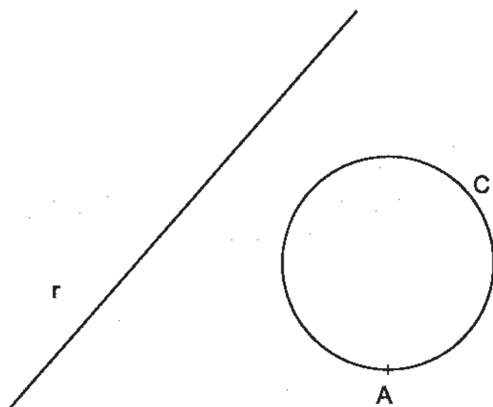


Para dibujar una de ellas se traza una recta perpendicular a r en A. Cogemos cualquier punto de esa recta como centro de una circunferencia C tangente a r en A. Ahora el problema lo hemos transformado en el caso PRC de Apolonio.



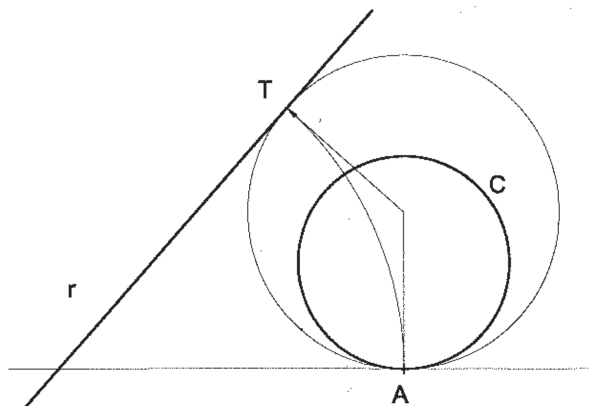
Para resolverlo cogemos una inversión de centro B y K cualquiera, aunque la más sencilla es la que tiene una cpd que pasa por el punto de contacto de la tangente a C desde B, ya que transforma C en ella misma. La recta r también se transforma en ella misma por pasar por el centro de inversión. Por tanto transformamos la circunferencia y la recta s en sus inversas, que son ellas mismas. Si trazamos ahora la recta paralela a s que sea tangente a C' (hay dos tangentes y, por tanto, dos soluciones), al deshacer la inversión, esa recta se transforma en una circunferencia que pasa por B y es tangente a C y a s, es decir, en la solución.

Circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia en un punto dado



Se puede resolver como un caso de Apolonio (PRC), pero lo más fácil es hacerlo usando el concepto de potencia, de la siguiente forma:

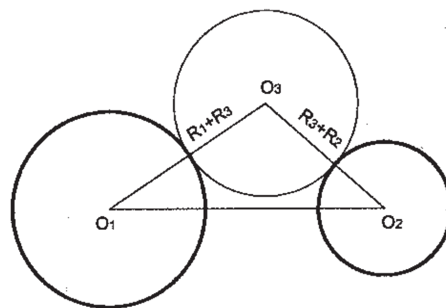
Se traza la tangente a C en A, que corta a r en B. La circunferencia buscada es tangente a C en A, por lo que la potencia de B respecto a las dos es la misma, concretamente BA^2. Por tanto, basta llevar la distancia BA sobre r a partir de B para hallar el punto de tangencia T de r con la circunferencia buscada. Por último, el centro estará en la intersección de las perpendiculares a las dos rectas en los puntos de tangencia.



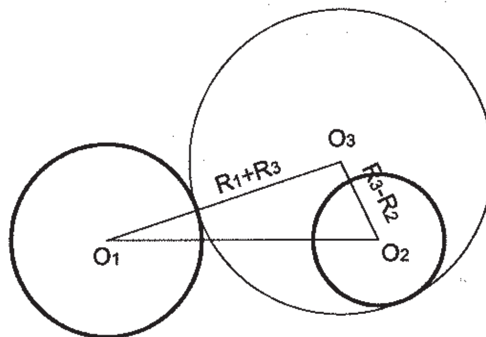
Hay otra solución: la circunferencia tangente exterior, cuyo punto de tangencia con la recta r se obtiene al llevar BA sobre r en sentido opuesto a BT.

Circunferencia de radio dado, tangente a otras dos

En este caso, los datos son C_1, C_2 y R_3. Se recuerda que los centros de dos circunferencias tangentes están siempre alineados con el punto de tangencia. Por tanto, para hallar O_3 basta construir un triángulo de lados O_1O_2, R_1+R_3, R_2+R_3, todos ellos datos del problema.

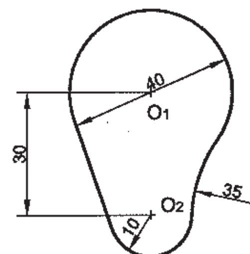


Si la circunferencia pedida tuviese que ser tangente interior a C_2 y exterior a C_1, los lados del triángulo serían O_1O_2, R_1+R_3, R_3-R_2. De forma similar se hallarían los lados del triángulo $O_1O_2O_3$ en otros casos.



EJERCICIO RESUELTO

Dibujar la figura con las medidas indicadas en el croquis.



Dibujamos un segmento vertical de 30 mm, y desde sus extremos trazamos las dos circunferencias de radios 10 y 20 mm (ojo: el dato de la circunferencia superior es el diámetro).

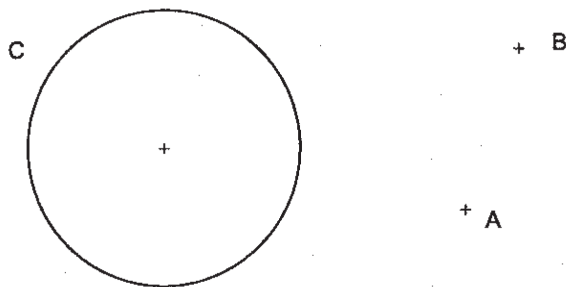
Trazamos la recta de la izquierda tangente a las dos circunferencias.

Para hallar el centro de la circunferencia de radio 35 mm, desde O_1 y O_2 trazamos arcos de radios (20+35) y (10+35) mm respectivamente. Donde se corten es el centro del arco de 35 mm. Los puntos de tangencia se obtienen uniendo ese centro con O_1 y O_2.

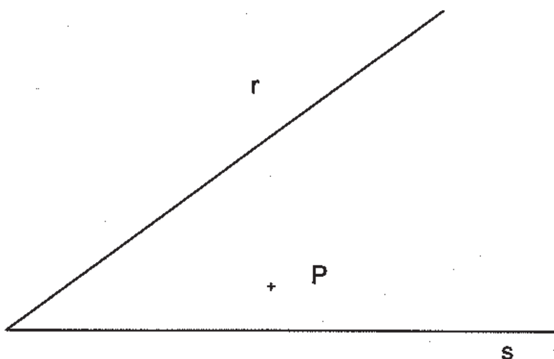
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dibujar una circunferencia que pasa por A y B y es tangente a otra C de centro O y r = 1 cm, si A, B y O forman un triángulo rectángulo de catetos AB=2 cm y BO = 3 cm.

2. Dados los puntos A y B y la circunferencia C, trazar una de las posibles circunferencias tangentes a esos tres elementos. Explicación razonada. Indicar el número de soluciones posibles.

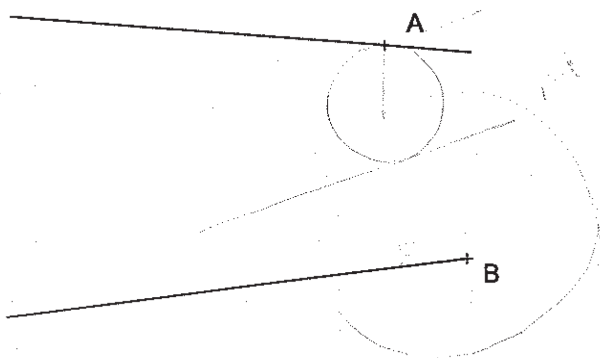


3. Trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s, y que pasan por el punto P.

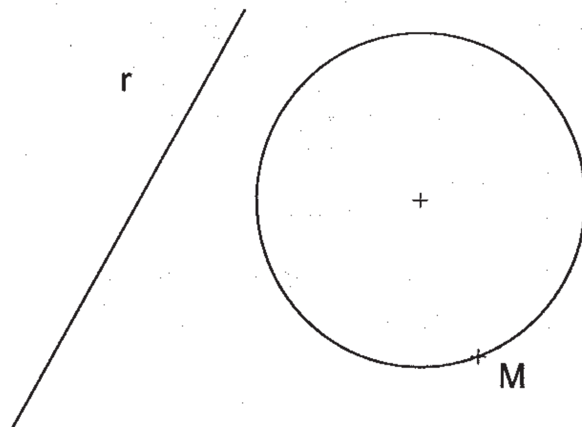


4. Dibujar una de las circunferencias que pasan por P y son tangentes a las circunferencias de centro O_1 y r_1 = 1 cm, O_2 y r_2 = 2 cm, si PO_1O_2 es un triángulo equilátero de lado 4 cm.

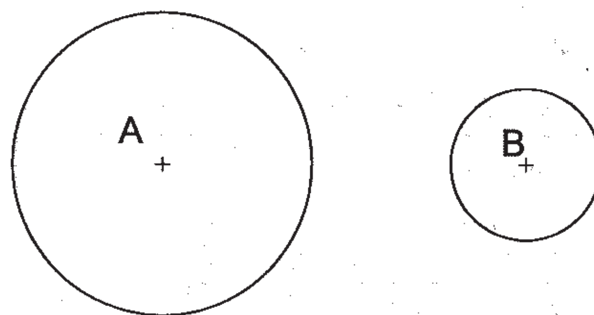
5. Trazar dos circunferencias tangentes interiormente entre sí y tangentes a las rectas dadas, una en A y la otra en B.



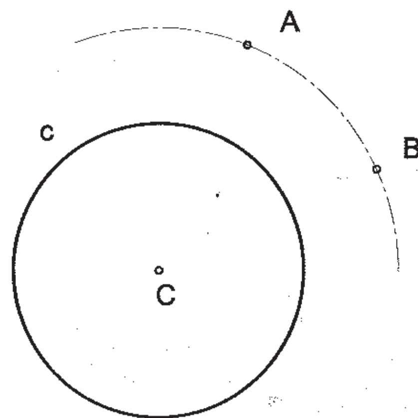
6. Trazar una circunferencia tangente interiormente a la dada en M y tangente a la recta r.



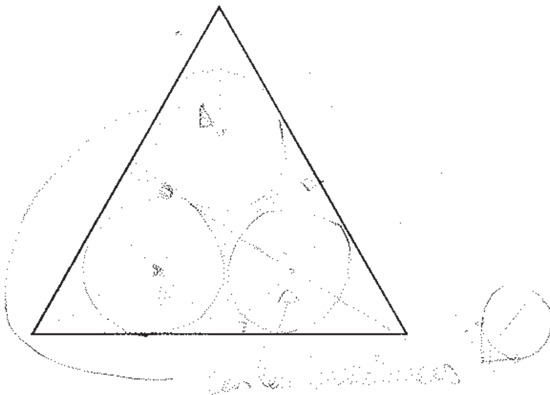
7. Trazar una circunferencia de 3 cm de radio, tangente interior a la B y tangente exterior a la A.



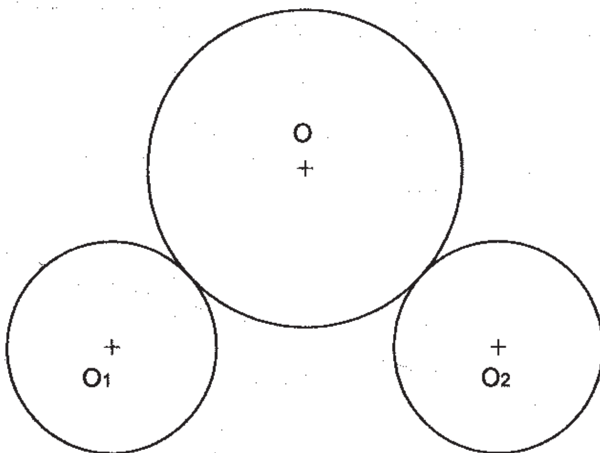
8. Determinar las circunferencias tangentes a la c que pasan por los puntos A y B.



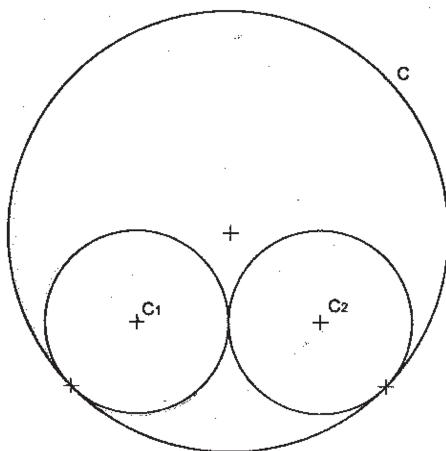
9. Dado el triángulo equilátero de la figura, trazar en su interior tres circunferencias de igual radio siendo cada circunferencia tangente exteriormente a las otras dos y siendo tangentes, además, a los lados del triángulo.



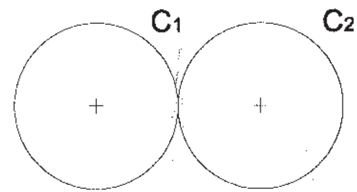
10. Trazar una circunferencia tangente a los tres dadas, de tal modo que éstas resulten exteriores y sabiendo que las circunferencias de centros O_1 y O_2 son iguales.



11. La circunferencia C de la figura representa un tubo que alberga en su interior a dos cables cilíndricos de igual diámetro, y a un tercero cuyo diámetro máximo se pretende calcular. Determínese éste gráficamente.

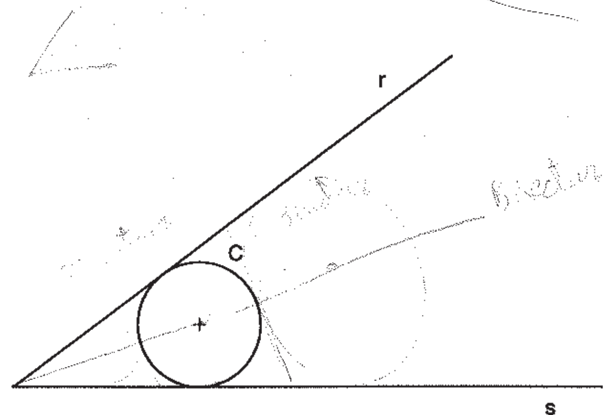


12. Obtener la circunferencia de menor radio posible que sea tangente a las circunferencias c_1 y c_2, de igual radio, y a la recta t, siendo esta última paralela a la que une los centros de ambas circunferencias.

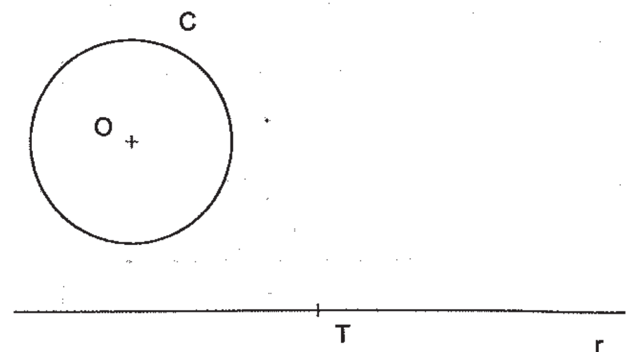


t

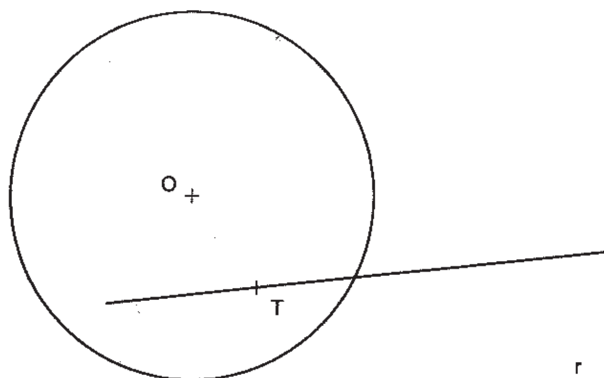
13. Dados las rectas r y s y la circunferencia C tangente a ambas, trazar las circunferencias tangentes a s, r y C.



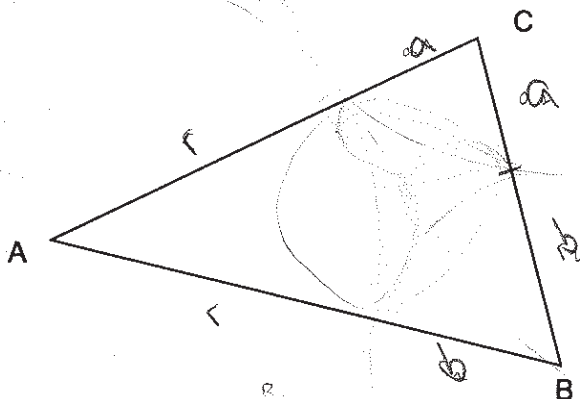
14. Trazar las circunferencias que sean tangentes a la circunferencia C y a la recta r en el punto T.



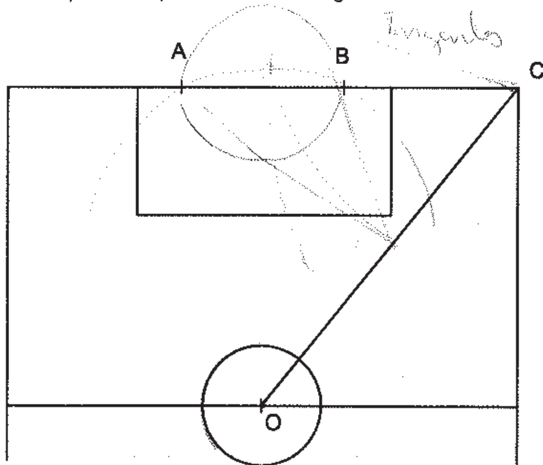
15. Trazar dos circunferencias tangentes a la circunferencia dada y a la recta r en el punto T.



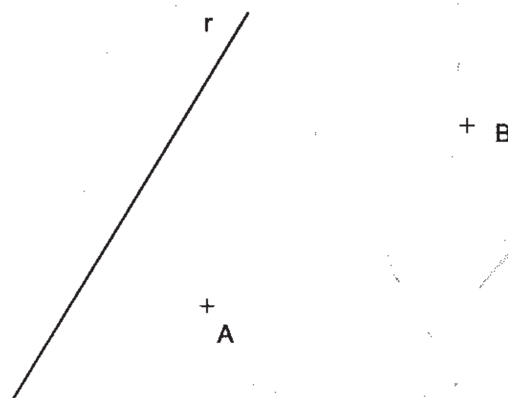
16. Dados los puntos A, B y C, trazar tres circunferencias con centros en estos puntos y que cada una sea tangente a las otras dos.



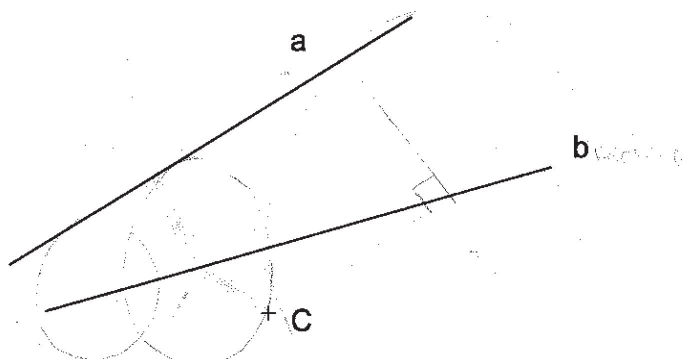
17. Un jugador de fútbol se dirige desde el centro del campo O hacia la esquina C, siguiendo una trayectoria rectilínea. ¿Desde qué punto de esta trayectoria divisa los extremos A y B de la portería con el ángulo máximo?



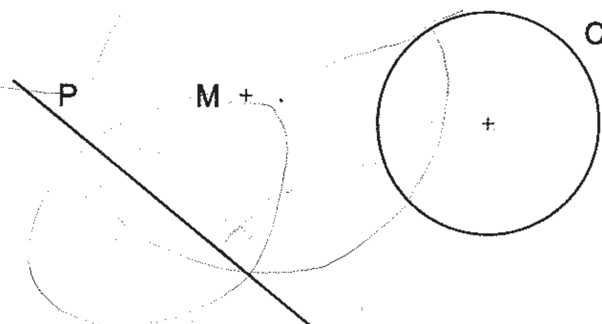
18. Dados los puntos A y B y la recta r, hallar los puntos del plano que equidistan de A, B y r.



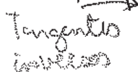
19. La recta a es una conducción de abastecimiento de agua de una ciudad, b es un río subterráneo y C un caserío. Se va a hacer un pozo cuya agua irá al caserío y a la conducción de abastecimiento general. Buscar el emplazamiento idóneo para que las nuevas canalizaciones sean de igual longitud. (Explicación razonada).



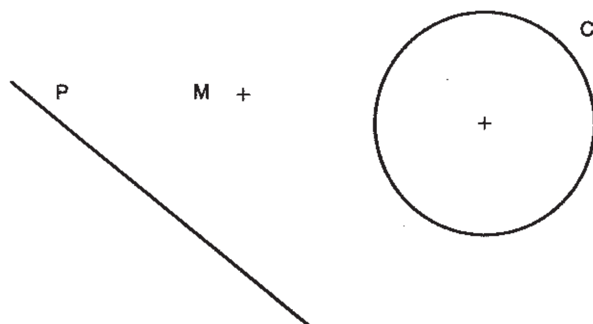
20. En una ciudad hay una plaza de toros C, una boca de metro M y un paseo P. Una castañera que cursó Dibujo en 2º de Bachillerato quiere poner un puesto equidistante a esos lugares. Indicar en el plano la posición que escogió. (Explicación razonada).



21. Trazar las circunferencias que son tangentes a C_1 y a C_2 siendo P el punto de tangencia con esta última.



42. En una ciudad hay una plaza de toros C, una boca de metro M y un paseo P. Una castañera que cursó Dibujo en 2° de Bachillerato quiere poner un puesto equidistante a esos lugares. Indicar en el plano la posición que escogió. (Explicación razonada).



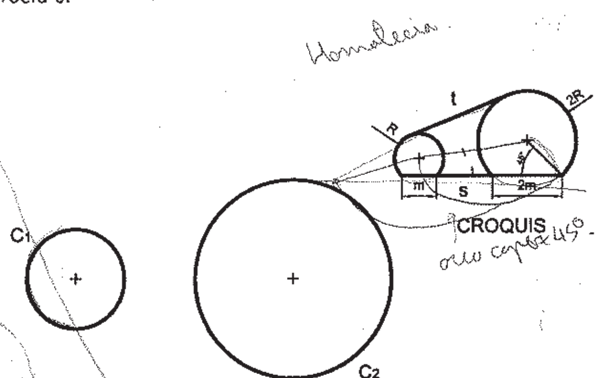
22. Determinar el punto P que equidiste de los A y B y que su distancia a C sea 30 mm mayor que las distancias a los anteriores puntos.

C

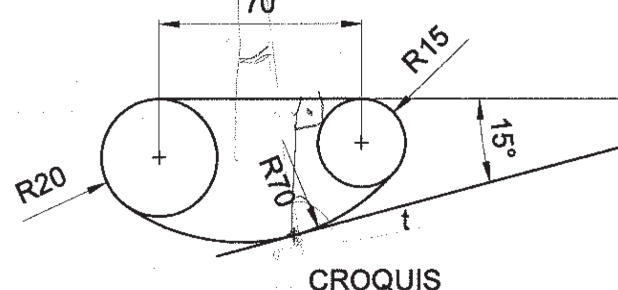
A

B

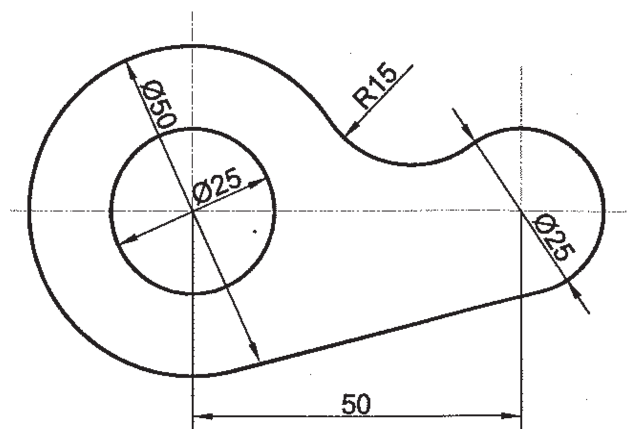
23. De conformidad con las condiciones de diseño expresadas en el croquis adjunto, hallar geométricamente la recta s.



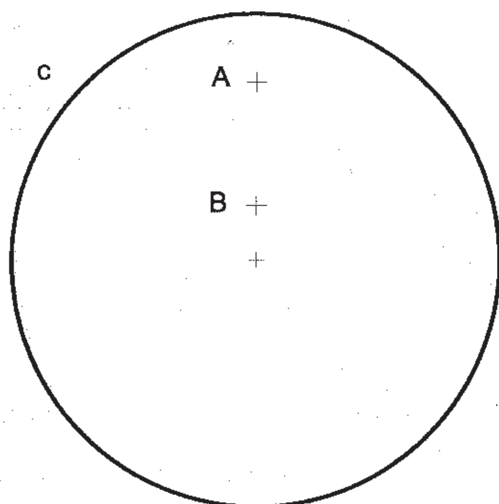
24. Dibujar a escala natural la figura cuyo croquis se adjunta y situar en él la recta tangente t con la condición angular que se expresa. Determinar con precisión los centros y los puntos de tangencia de las circunferencias.



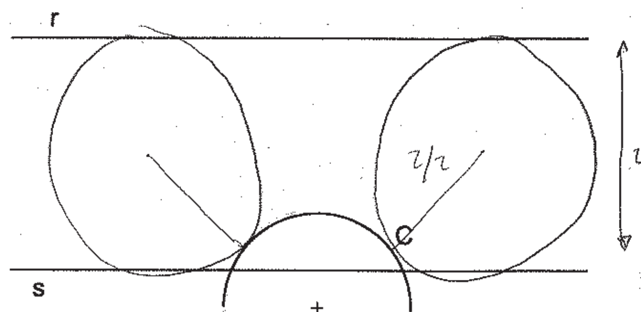
25. Dibujar a escala 1:1 el objeto representado en el croquis adjunto, según los datos del mismo, indicando los centros y los puntos de tangencia.

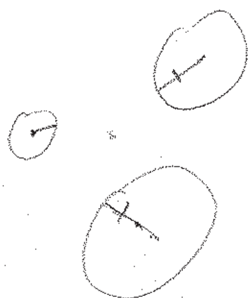


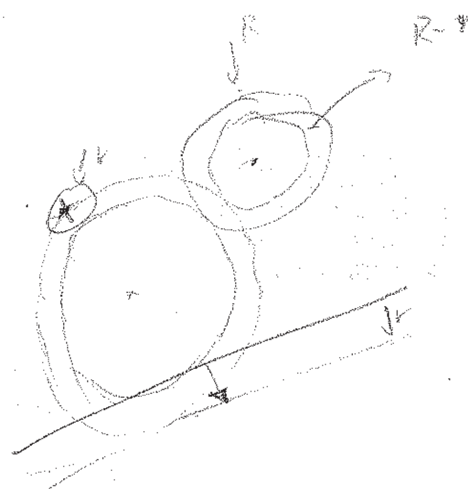
26. Determinar las circunferencias tangentes a la circunferencia c dada, que pasan por los puntos A y B. Exponer razonadamente el fundamento de la construcción empleada



27. Determinar las circunferencias tangentes a las rectas paralelos r y s y a al circunferencia c

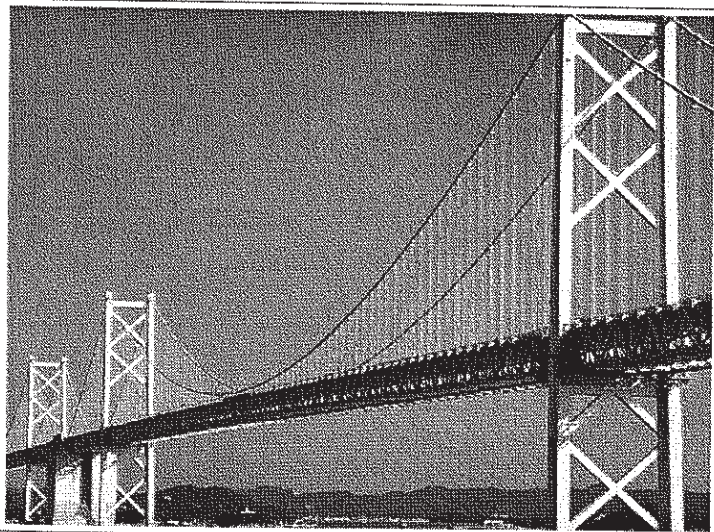






TEMA 8

CURVAS TÉCNICAS



1. CURVAS CÍCLICAS

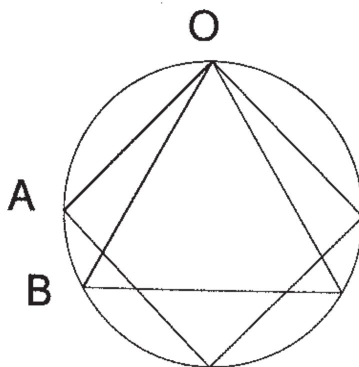
Estas curvas son las engendradas por un punto de una circunferencia móvil, llamado **ruleta** o generatriz, al rodar sin deslizar sobre otra circunferencia fija llamado **base** o directriz. También se las llama curvas mecánicas o móviles.

Una curva cíclica recibe el nombre de **epicicloide** cuando la circunferencia móvil es exterior a la fija. Si el radio de la base es infinito, es decir, es una recta, se la llama **cicloide**. Por último, si la ruleta es interior a la base, recibe el nombre de **hipocicloide.**

Trazado de la cicloide

Vamos a ver cómo se dibuja, por puntos, una cicloide conocido el radio de la ruleta. Necesitamos saber la longitud de su circunferencia. Para hallarla gráficamente, se inscribe en ella un cuadrado y un triángulo equilátero. La longitud aproximada de la circunferencia es:

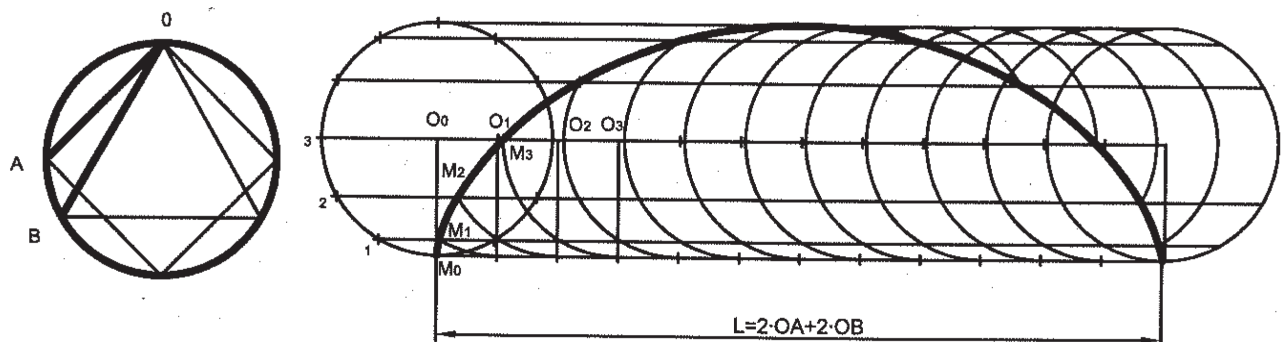
$$L = 2\overline{OA} + 2\overline{OB}$$



Dibujamos la ruleta situada en un extremo del segmento de longitud L. Dividimos la ruleta en tantas partes iguales como puntos de la curva queremos hallar, por ejemplo 12. Trazamos rectas paralelas a la base por esas divisiones y también por el centro. la longitud L sobre la base también la dividimos en 12 partes iguales.

El punto M, que pertenece a la ruleta, nos va a describir la cicloide al rodar la circunferencia sobre la base.

Al girar 1/12 de vuelta, la posición de la ruleta se ha desplazado hacia la derecha 1/12 de L, el centro está en O_1 y el punto M está en M_1, que es un punto de la cicloide.



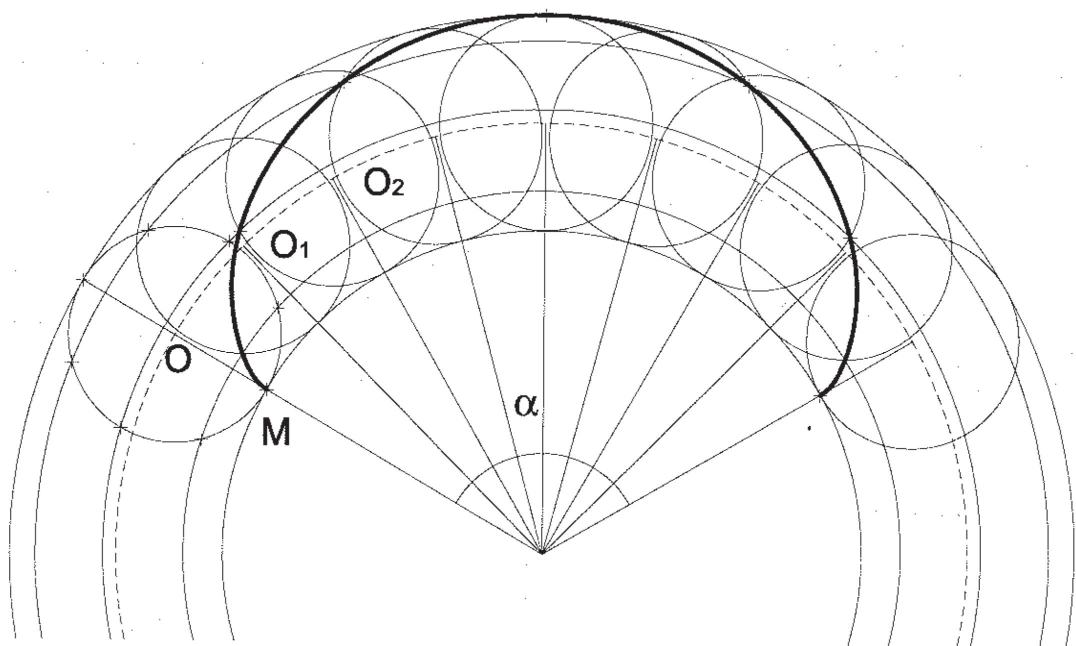
Al girar otro 1/12 de vuelta, el centro de la ruleta se situará en O_2 y M estará en M_2. Así proseguimos doce veces, hallando doce puntos de la curva que se unen a mano alzada o con plantilla de curvas.

Trazado de la epicicloide

Necesitamos conocer los radios de la base R_b , y de la ruleta R_r. La construcción es similar al ejercicio anterior, aunque en este caso tenemos que llevar la longitud de la ruleta sobre la base, que es una curva. En ella abarcará un ángulo α

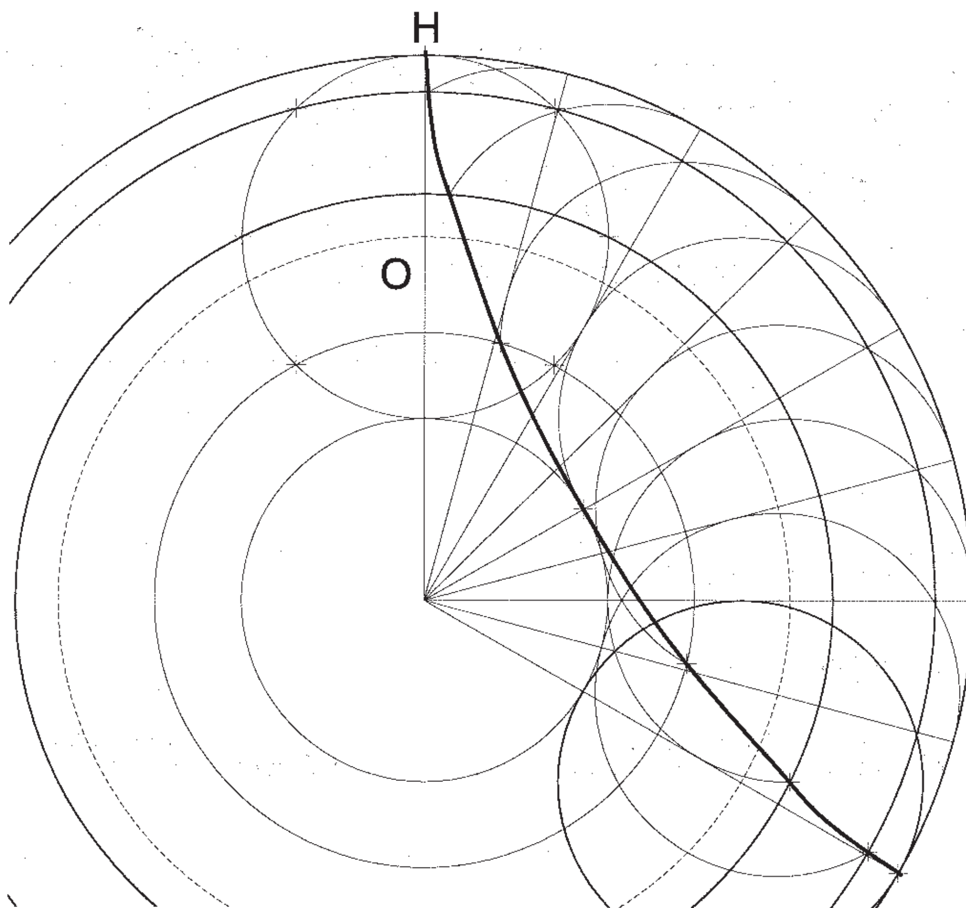
$$\alpha = 360° \cdot \frac{R_r}{R_b}$$

La división de la base se hace dividiendo el ángulo α en ocho partes, por ejemplo. El resto de la construcción es similar a la cicloide.



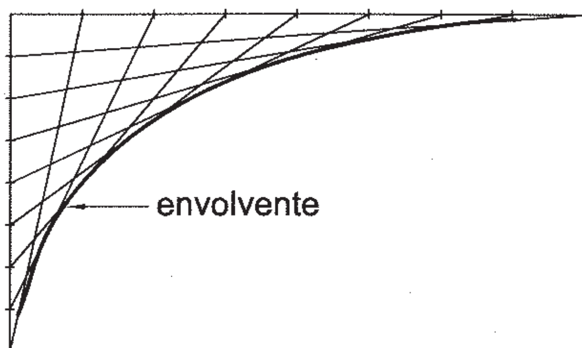
Trazado de la hipocicloide

En la hipocicloide, la ruleta es interior a la base. La construcción es similar a la de los casos anteriores.

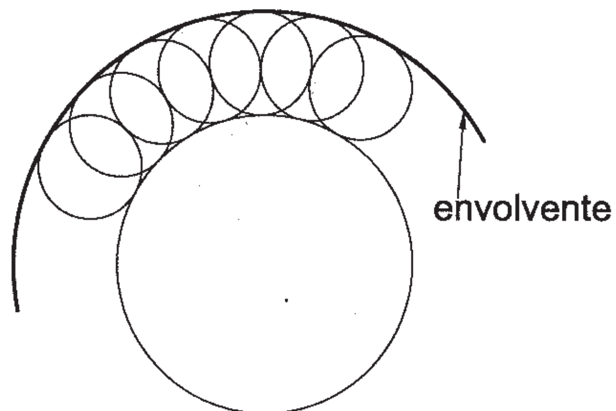


2. ENVOLVENTE

Se llama envolvente de una familia de curvas a otra curva tangente a cada una de las curvas de la familia. Por ejemplo, la envolvente de esta familia de rectas es:

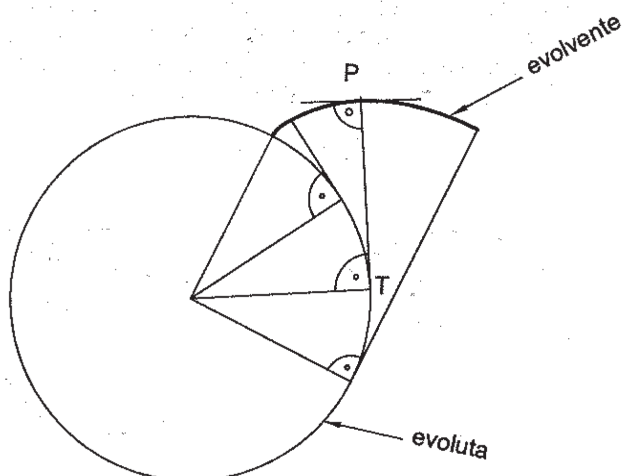


Y la curva envolvente a esta familia de circunferencias es:



3. EVOLVENTE

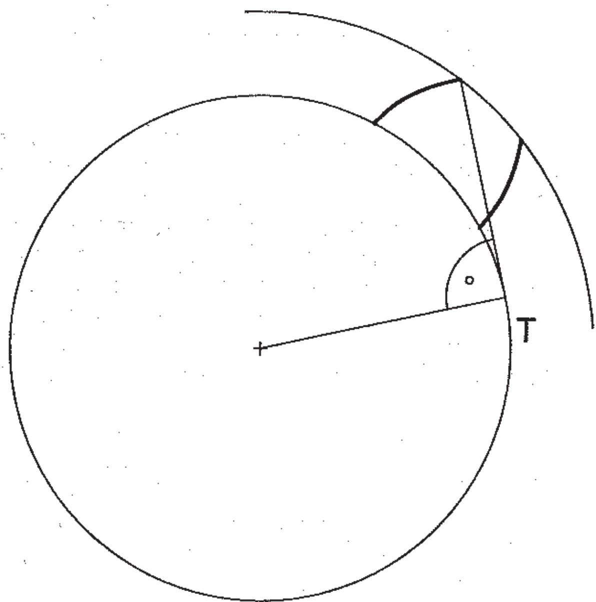
Se llama **evolvente** a la curva que describe un punto de una recta que rueda sin deslizar sobre otra curva llamada **evoluta**.



En un punto cualquiera P, la distancia TP es el radio de curvatura de la evolvente, y T el centro de curvatura o centro del círculo osculador de la evolvente en P. Círculo osculador de una curva en un punto es aquel que más se aproxima a la curva en un entorno de ese punto: tiene un contacto de tercer grado, lo que algebraicamente significa que coinciden la curva y las derivadas primera y segunda.

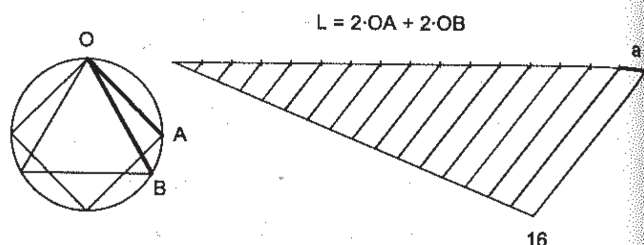
La evoluta se puede considerar como envolvente de las normales a la evolvente, o como lugar geométrico de los centros de curvatura de ella.

Este tipo de curvas se aplica en la fabricación de ruedas dentados en mecanismos, para conseguir un contacto entre dientes sin deslizamiento y, por tanto, con mínimo desgaste.

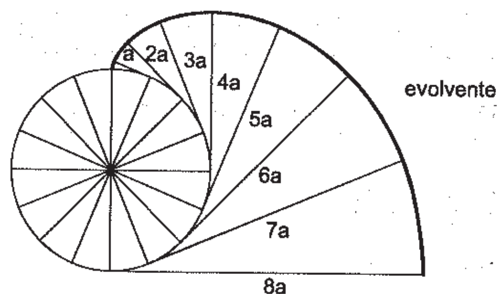


Trazado de la evolvente de una circunferencia de radio dado

Hallamos la rectificación (longitud) de la circunferencia y la dividimos en un número de partes iguales, en este caso 16.



Trazamos en la circunferencia radios que la dividan en 16 partes iguales (primero en cuatro partes, luego cada una de esas partes se divide en dos, y cada octavo se divide por último en dos partes iguales). Por los puntos así determinados se trazan tangentes, y sobre ellas, a partir del punto de tangencia, se llevan $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \ldots$, etc., partes de la circunferencia.



4. ESPIRALES. VOLUTA

Espairales son los curvas descritas por un punto situado sobre una semirrecta que se desliza sobre ella a la vez que la recta gira sobre un punto de ella.

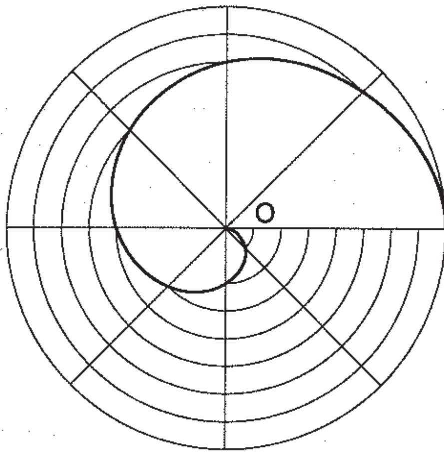
Si la velocidad del punto sobre la semirrecta y la de giro de ésta son constantes, describen la llamada **espiral de Arquímedes.** Es la curva que describe el borde de una lámina enrollada sobre sí misma.

La mínima distancia radial entre dos puntos de la curva se llama paso de la espiral.

Trazado de la espiral de Arquímedes

Sobre una semirrecta OA se llevan n partes iguales, por ejemplo 8, y desde 0 se trazan semirrectas que formen ángulos iguales de $\frac{360^\circ}{8}$. Se dibujan arcos concéntricos de radios

crecientes, que cortan a las semirrectas en puntos de la espiral. La distancia OA es el *paso* de la espiral, es decir, la distancia entre dos puntos consecutivos de la espiral después de una vuelta.



Trazado de la espiral de varios centros. Voluta

Se pueden trazar espirales compuestas por diversos arcos de circunferencias tangentes entre sí, cuyos centros van ocupando distintas posiciones, por ejemplo los vértices de un polígono regular. Hay espirales de dos centros, de tres centros, etc. **A la de cuatro centros tradicionalmente se la ha llamado Voluta.**

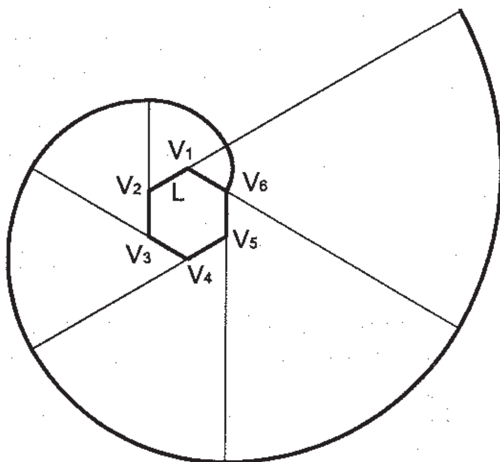
El paso de la espiral es el perímetro del polígono (N·L). Como ejemplo vamos a hacer la espiral de seis centros.

EJERCICIO RESUELTO 7

Dibujar la espiral de seis centros.

Dibujamos un hexágono regular de lado L y vértices V_1, V_2, V_3, etc..

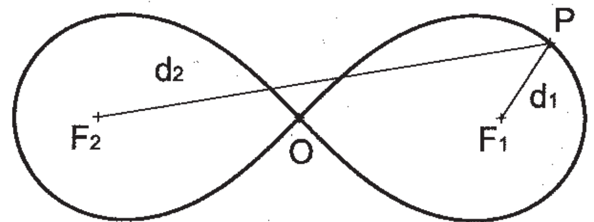
Con centro en V_1 trazamos un arco de circunferencia de radio L hasta que lo corta la prolongación del lado V_1V_2. Cogemos ahora como centro a V_2 y trazamos un arco de radio 2L tangente al anterior, hasta que lo corta la prolongación del lado V_2V_3. Seguimos con V_3 y radio 3L, etc.



5. LEMNISCATA DE BERNOUILLI

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, la Lemniscata de Bernouilli es el lugar geométrico de los puntos P cuyo producto de distancias a esos dos puntos fijos es constante e igual al cuadrado de la semidistancia entre F_1 y F_2.

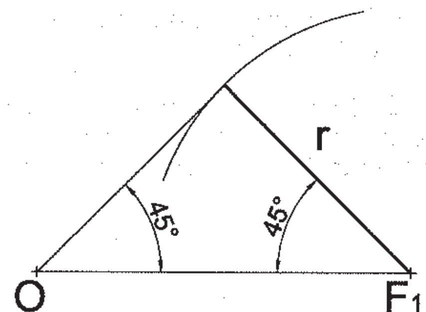
$$d_1 \cdot d_2 = OF_1^{\,2}$$



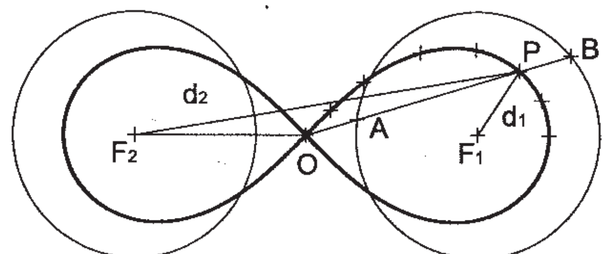
Se puede construir a partir de dos circunferencias de centro en los focos y con un radio de:

$$r = \frac{OF_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow OF_1 = r \cdot \sqrt{2}$$

Ese radio se puede obtener trazando rectas que formen 45° desde O y F_1 ó F_2:



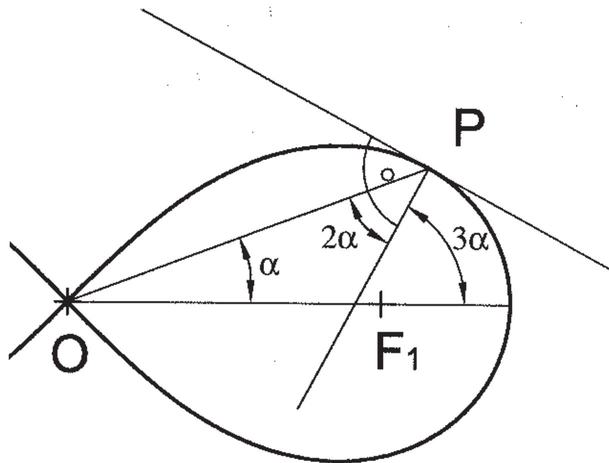
Una vez que tenemos dibujados los focos F_1 y F_2, el centro O las dos circunferencias de radio *r*, veamos cómo obtener puntos de la curva. Trazamos desde O una recta cualquiera, que corta a la circunferencia en A y B, y se marca en esa recta un punto P que cumpla OP = AB. Así se hace con otras rectas y se van obteniendo puntos de la curva. Las rectas que se cojan deben tener una inclinación menor de 45°, pues si no no cortan a la circunferencia. Por esa razón, la recta tangente a la lemniscata en O forma un ángulo de 45° con la horizontal.



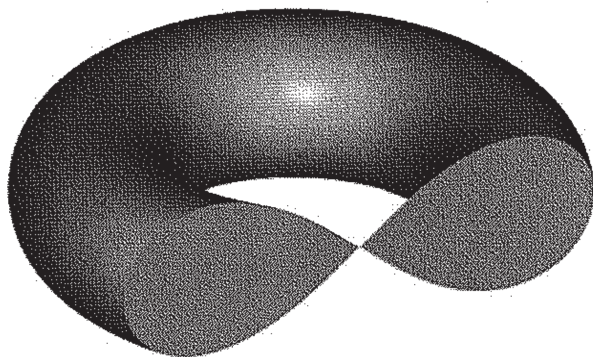
Propiedade de la Lemniscatas

- Tiene dos ejes de simetría.

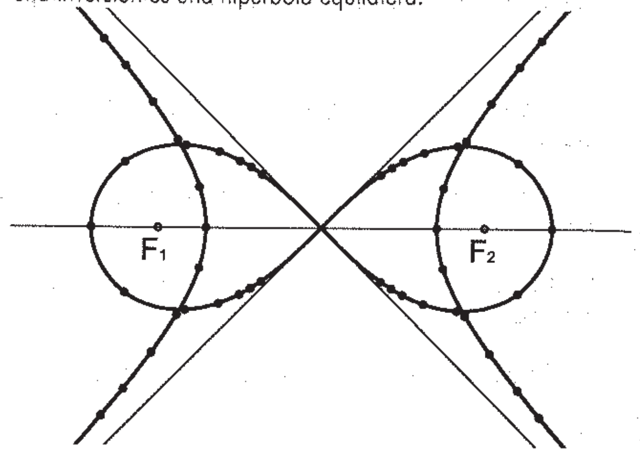
- Sea P un punto cualquiera de la curva, y α el ángulo que forma OP con la recta OF_1. El ángulo que la recta normal en ese punto P forma con OP es 2α y el ángulo que forma con OF_1 es 3α.



- La sección que se produce en una superficie tórica por un plano vertical tangente interiormente, es una Lemniscata de Bernouilli.



- La figura transformada de una lemniscata de Bernouilli en una inversión es una hipérbola equilátera.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dibujar la cicloide engendrada por una ruleta de radio 35 mm.

2. Dibujar la epicicloide con los siguientes datos: R_b = 45 mm R_r = 15 mm

3. Dibujar la hipocicloide con los siguientes datos: R_b = 60 mm R_r=20 mm

4. Trazar la evolvente de una circunferencia de radio 15 mm.

5. Un insecto camina en un disco desde el centro al exterior en línea recta, a una velocidad de 1 cm/s. El disco tarda 4 segundos en dar una vuelta. Dibujar la curva descrita durante 8 segundos.

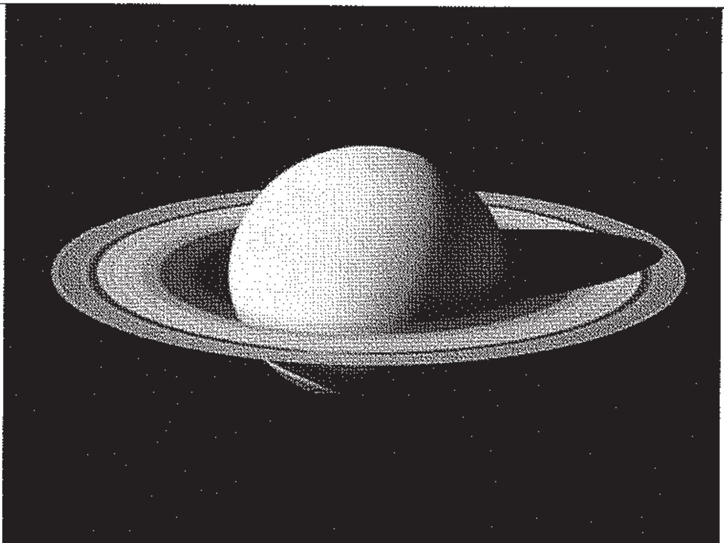
6. Dibujar una espiral de 5 centros, los cuales forman un pentágono regular de 1 cm de lado.

7. Dibujar una voluta de paso 6 cm.

8. Dibujar una Lemniscata de Bernouilli cuya distancia entre los focos sea 10 cm.

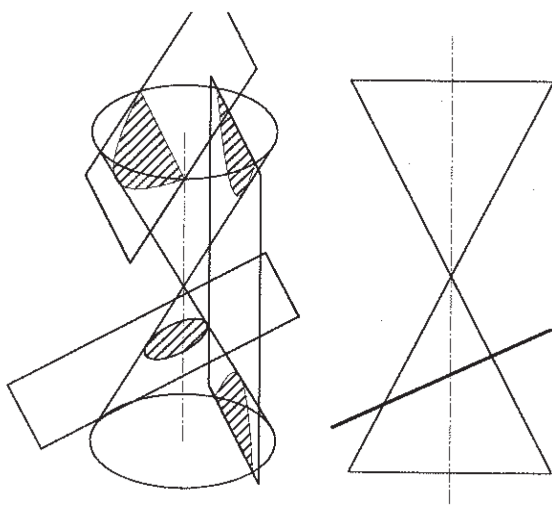
TEMA 9

CURVAS CÓNICAS



1. CURVAS CÓNICAS

Las curvas cónicas se obtienen al cortar un cono de directriz circular con un plano P. Lógicamente son curvas planas.



En el plano, la expresión analítica de estas curvas es una ecuación de segundo grado.

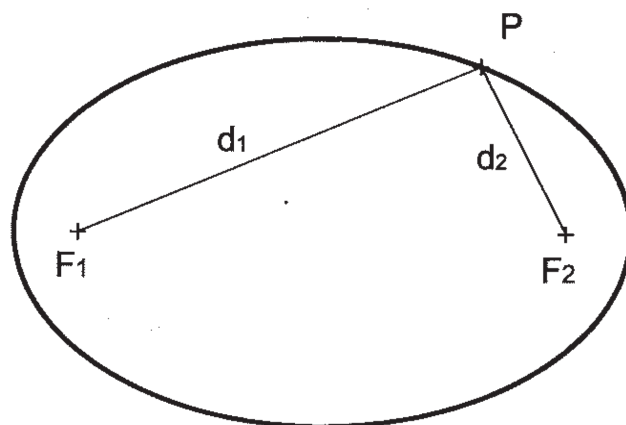
Las curvas cónicas se clasifican en: elipse (el plano P corta a todas las generatrices), parábola (el plano P e paralelo a una generatriz) e hipérbola (el plano P es paralelo al eje del cono). Estudiemos cada una de ellas.

2. ELIPSE

Definición

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta se suele indicar como 2a.

$$d_1+d_2= \text{constante} = 2a$$



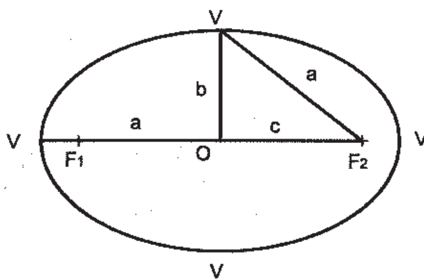
Elementos

Los elementos principales de la elipse son:

a: semieje mayor.
b: semieje menor.
c: semidistancia focal.

e: excentricidad = $\frac{c}{a}$. Indica el grado de "achatamiento" de la elipse. Está comprendido entre 0 (circunferencia) y 1 (un segmento).

0: centro. No coincide con la intersección del plano de corte P con el eje del cono.
Vértices: corte de la elipse con los ejes mayor y menor.
Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse.
Diámetros: cualquier cuerda que pasa por el centro.



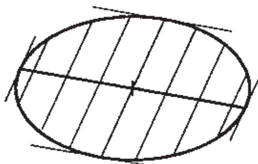
Diámetros conjugados

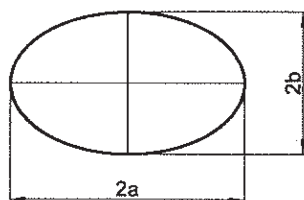
Dado un diámetro cualquiera, trazamos varias cuerdas paralelas a él. El segmento que une todos los puntos medios de estas cuerdas pasa por el centro y se llama **diámetro conjugado del** primero.

Dos diámetros conjugados son conjugados entre sí, es decir, cada uno es conjugado del otro.

En los extremos de un diámetro, las tangentes a la elipse son paralelas al diámetro conjugado.

Los diámetros conjugados que son perpendiculares se llaman **diámetros principales** y miden 2a y 2b. Son los únicos que forman 90°.

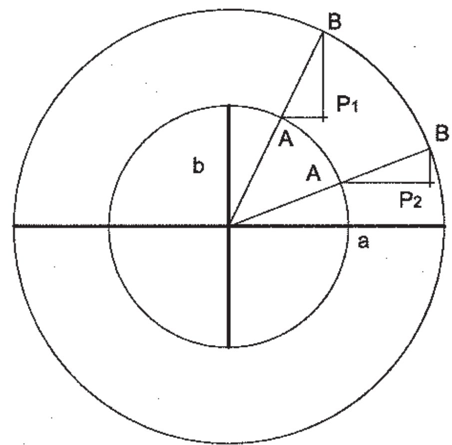




Construcción de la elipse a partir de los diámetros principales.

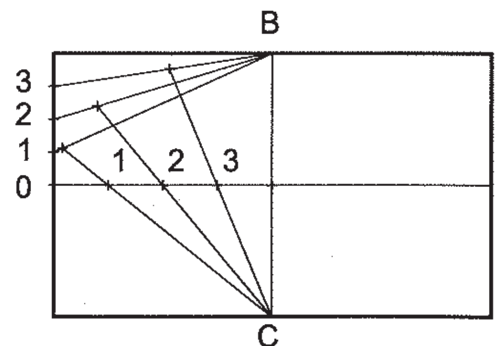
Método I

Se trazan las circunferencias de radios a y b.
Se traza un radio cualquiera, el cual corta a las dos circunferencias en los puntos A y B. Por el punto A se traza una paralela al diámetro de la circunferencia mayor, y por el punto B, al diámetro de la circunferencia menor. La intersección de ambas paralelas determina un punto P de la elipse.

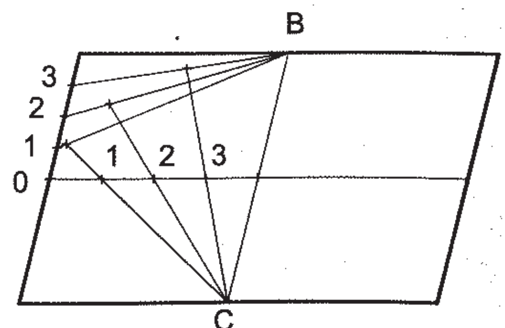


Método II

Se construye un rectángulo de lados 2a y 2b.
Se divide el semidiámetro a en n partes iguales (por ejemplo, 4), y el semilado b también. Esas divisiones se numeran según la figura y se unen con B y C. Las intersecciones de las rectas C-1 con B-1, de C-2 con B-2, etc., son puntos de la elipse.



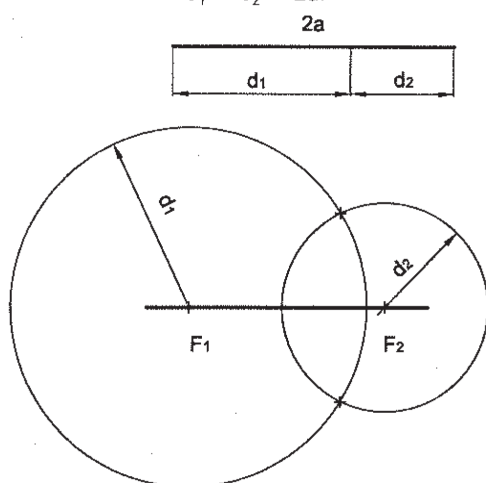
Este método es válido para aplicarlo directamente a dos diámetros conjugados.



Método III

Vamos a aplicar la definición. Dibujamos un segmento de longitud 2ª, y lo dividimos en dos tramos, que llamaremos d_1 y d_2. Con centro en F_1 se traza una circunferencia de radio d_1, y con centro en F_2 se traza una circunferencia de radio d_2. Los puntos de corte de esas dos circunferencias son puntos de la elipse, ya que cumplen que

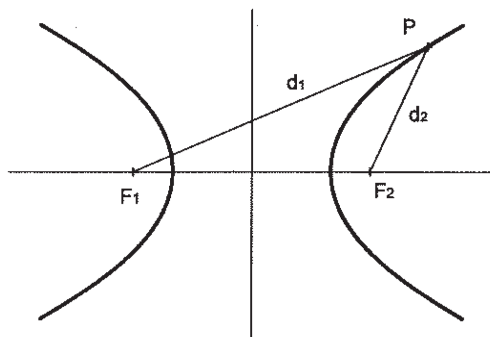
$$d_1 + d_2 = 2a.$$



3. HIPÉRBOLA

Definición

La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta se suele indicar como 2a.



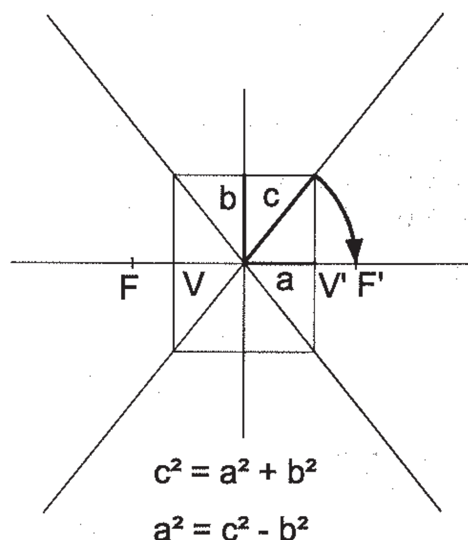
El conjunto de puntos tales que $d_1 > d_2$ determina una rama de la hipérbola, y el conjunto de puntos tales que $d_1 < d_2$ determina la otra rama.

Elementos

Los elementos de la hipérbola son los siguientes:

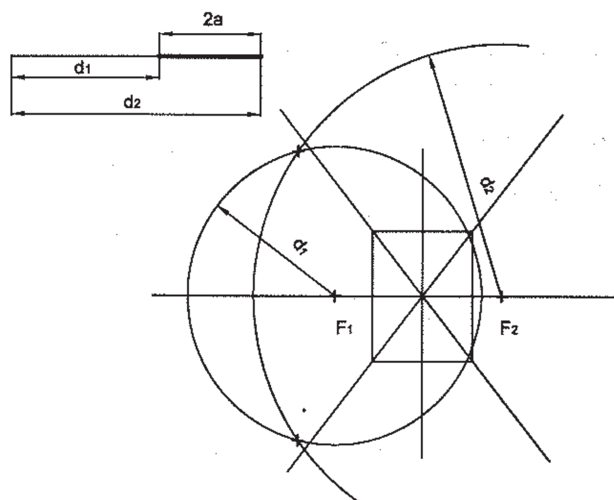
Focos: F_1 y F_2
Semieje real (corta a la hipérbola) = a.
Semieje imaginario (no corta a la hipérbola) = b
Semidistancia focal = c

Excentricidad = e = $\frac{c}{a}$. Puede tomar valores entre 1 (c=a y por lo tanto b=0) e infinito (a=0 ó c=∞). Si es $\sqrt{2}$, se llama **hipérbola equilátera** (a = b).
Vértices = V
Asíntotas: son las diagonales del rectángulo 2a, 2b. La curva tiende a ellas pero sin cortarlas.



Construcción de la hipérbola

Se trazan dos circunferencias, una con centro en F_1 y la otra con centro en F_2, cuya diferencia de radios sea 2a, o lo que es lo mismo, $d_1 = d_2 + 2a$. Los puntos de corte son puntos de la hipérbola, ya que cumplen la definición $d_1 - d_2 = |2a|$.

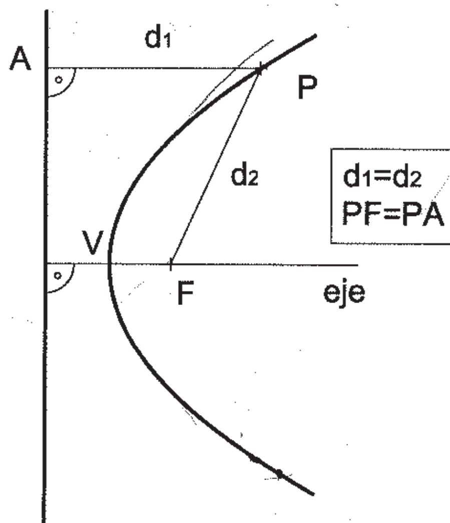


Con cada valor de d_2, hallamos dos puntos simétricos respecto al eje horizontal.

4. PARÁBOLA

Definición

La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta, llamada directriz.



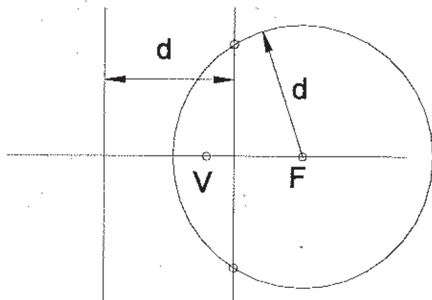
Elementos de la parábola

Directriz: Es una recta fija de referencia.
Foco: Un punto fijo de referencia.
Eje: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Es eje de simetría.
Vértice V: Es el punto de la parábola más cercano a la directriz. Es la intersección del eje con la parábola.
Parámetro: Se llama parámetro a la distancia de F a V o, lo que es lo mismo, de V a la directriz. Define la forma de la parábola.

La parábola tiene una sola rama y no tiene asíntotas.

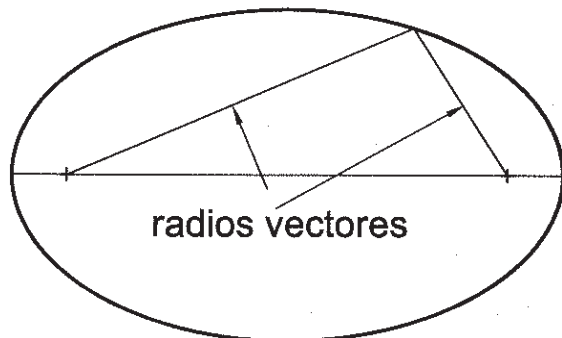
Construcción de la parábola

1) Se coge una distancia cualquiera que sea mayor que la distancia del foco al vértice, d > VF.
2) A partir de la directriz se lleva esa distancia sobre el eje y se traza una recta perpendicular a éste.
3) Desde el foco se traza una circunferencia de radio d. Donde corte a la recta trazado anteriormente, serán puntos de la parábola.

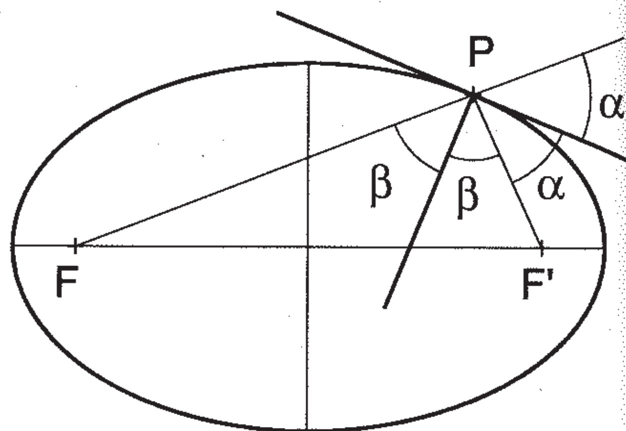


5. TANGENTE A UNA CÓNICA EN UN PUNTO

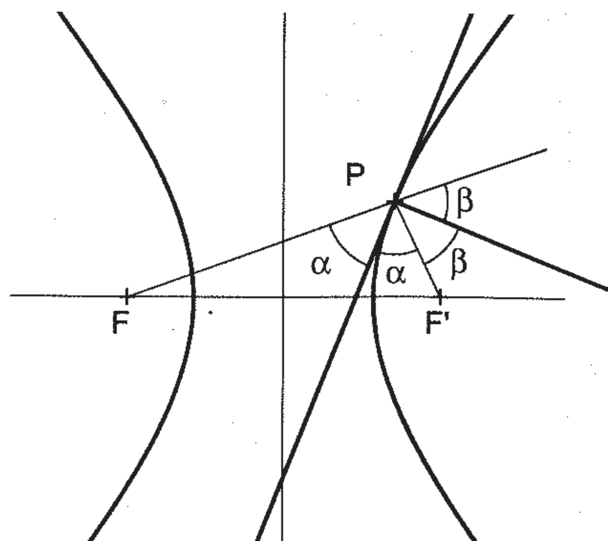
Se llaman radios vectores de un punto de una curva cónica a los segmentos que unen ese punto con los focos.



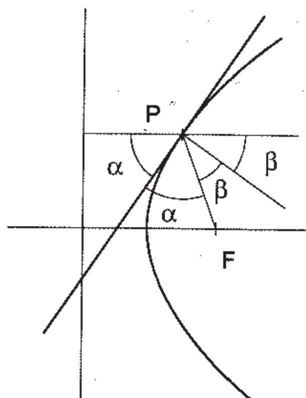
La tangente en un punto a una cónica es bisectriz de los radios vectores o de sus prolongaciones. También ocurre lo mismo con la recta perpendicular a la tangente (recta normal en ese punto).



En el caso de la hipérbola:

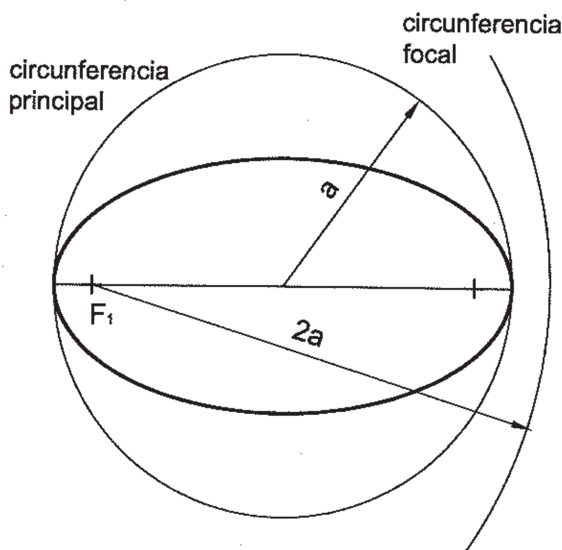


En la parábola, el segundo radio vector es la perpendicular a la directriz.

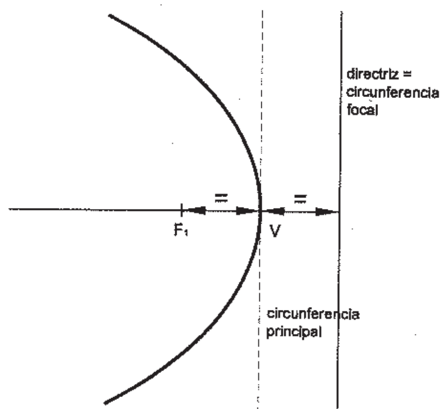


6. CIRCUNFERENCIAS FOCAL Y PRINCIPAL

Circunferencia focal es la circunferencia de centro uno de los focos y radio 2a.
Circunferencia principal es la que tiene como centro el mismo que la cónica, y radio a.



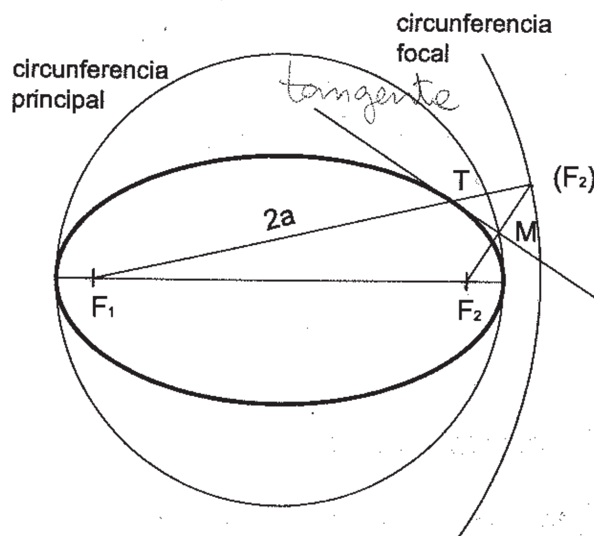
En la parábola, la circunferencia focal es la directriz, y la circunferencia principal es la recta paralela a la directriz que pasa por el vértice.



Propiedades

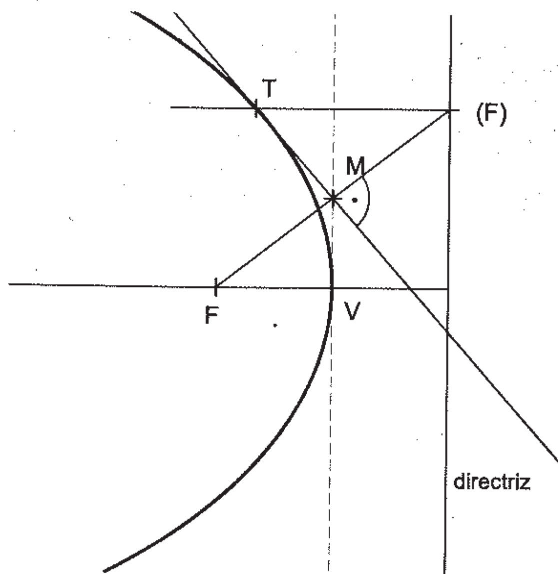
Si tenemos una tangente cualquiera a la cónica:

- El simétrico de F_2 respecto de ella está en la circunferencia focal.
- El pie M de la perpendicular a la recta tangente desde F_2 está en la circunferencia principal.
- El punto de tangencia T está alineado con la recta que une F_1 y el simétrico (F_2) del otro foco respecto de la tangente en ese punto.

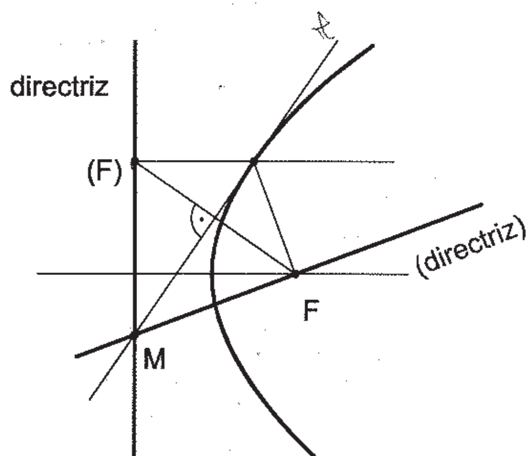


En la parábola estas propiedades también se cumplen si se considera que F_2 está en el infinito del eje de la parábola. Entonces las propiedades quedan así:

- El simétrico de F respecto de una recta tangente está siempre en la directriz.
- El pie M de la perpendicular a la recta tangente desde F está en la recta paralela a la directriz que pasa por el vértice V.
- El punto de tangencia T está en la recta paralela al eje que pasa por (F).

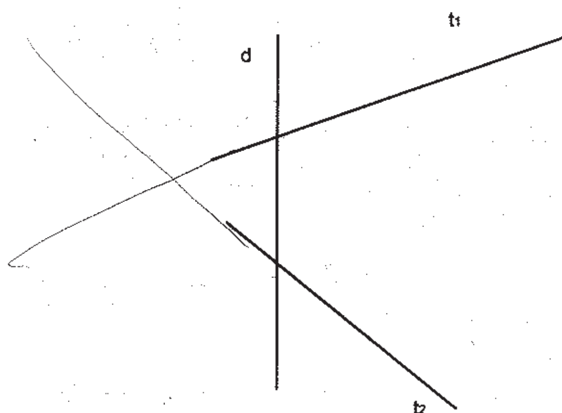


En el caso de la parábola, de la primera propiedad se obtiene un importante COROLARIO: **el foco estará siempre en la recta simétrica de la directriz respecto a cualquier tangente.**

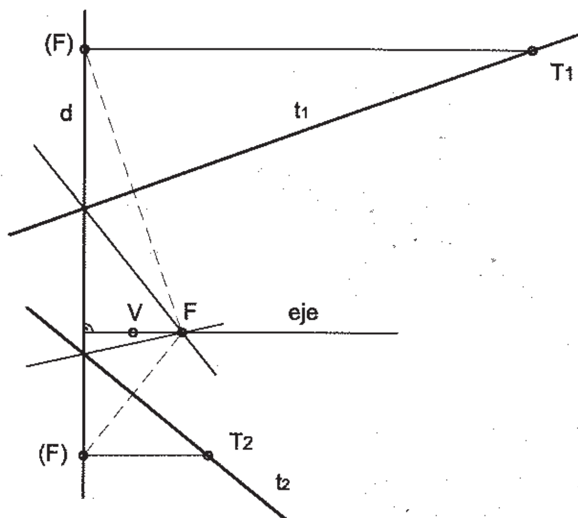


EJERCICIO RESUELTO 1

La recta d es directriz de una parábola y t_1 y t_2 son dos tangentes a la cónica. Hallar gráficamente el foco, el eje, el vértice y los puntos de tangencia de t_1 y t_2.

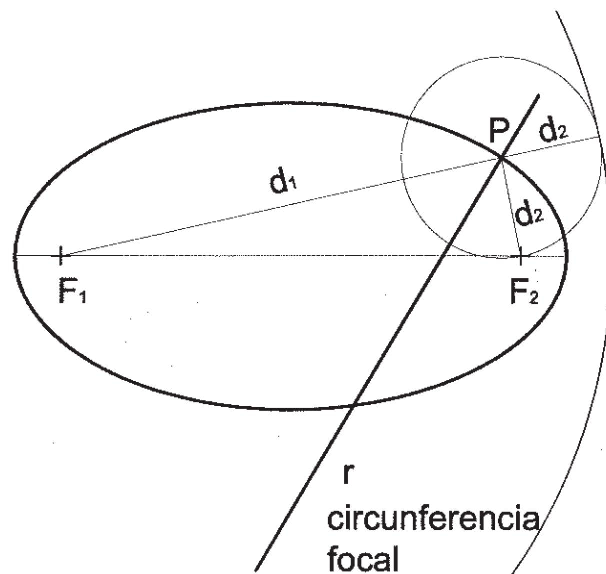


El foco F estará en las rectas simétrica de d respecto de t_1 y t_2. El eje es perpendicular a d desde F, y el vértice es el punto medio entre F y la directriz. Para hallar los puntos de tangencia, basta trazar rectas perpendiculares a d desde los dos puntos simétricos del foco (F).



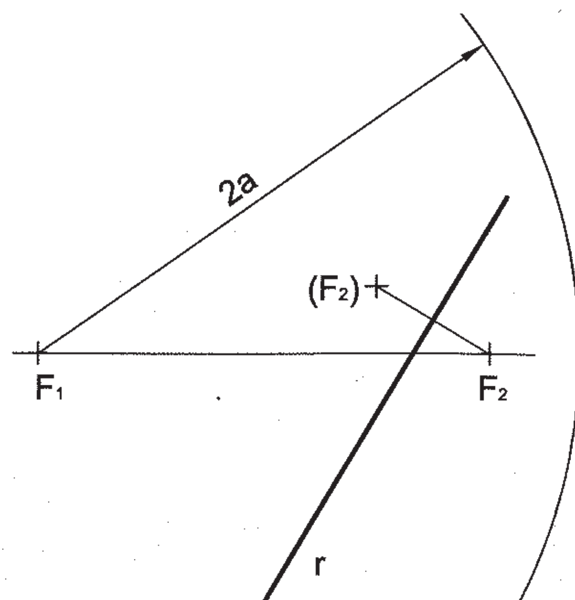
7. INTERSECCIÓN DE UNA CÓNICA CON UNA RECTA

En la elipse, como $d_1+d_2=2a$, todo punto P de la curva es centro de una circunferencia que es tangente a la circunferencia focal y que pasa por F_2.

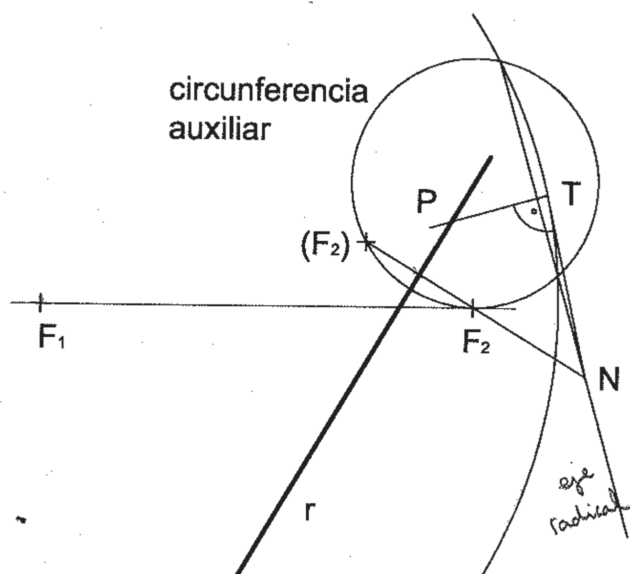


Si por P pasa una recta, el simétrico (F_2) de F_2 respecto de ella también está en la circunferencia citada anteriormente.

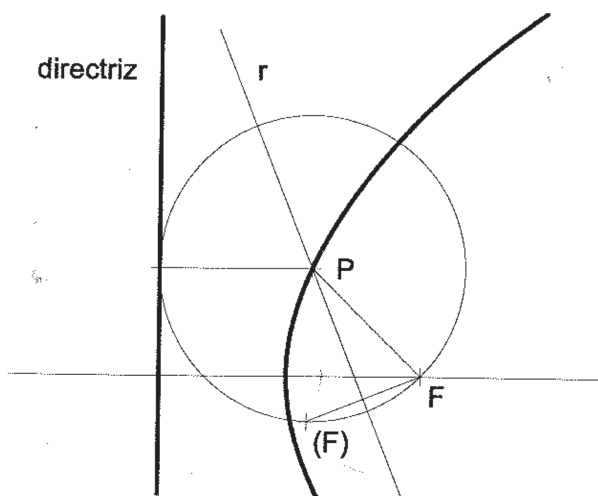
Por tanto, dada la recta r, para hallar el punto P donde corta a la elipse basta obtener el centro de una circunferencia que pasa por los puntos F_2, (F_2) y es tangente a la circunferencia focal, que se resuelve como un caso PPC de Apolonio:



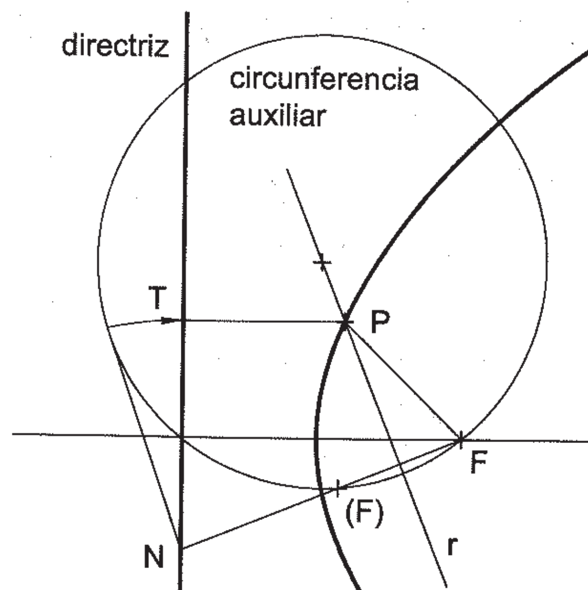
Se traza una circunferencia auxiliar que pase por F_2 y (F_2). Se halla el eje radical de esta circunferecnia y la focal. El punto de corte N de la recta F_2- (F_2) con ese eje radical es el centro radical de esas dos circunferencias y la solución. Por tanto basta trazar desde él la tangente a la circunferecnia focal, y el punto de tangencia T es también el de la circunferencia solución. Por tanto el centro de la circunferencia solución estará en la perpendicular a NT desde T y en r.



En el caso de la parábola, el punto intersección con una recta r es el centro de una circunferencia que pasa por F, su simétrico (F) respecto de la recta r, y es tangente a la directriz.



Se resuelve como un caso PPR de Apolonio: se traza una circunferencia auxiliar que pase por F y (F). Desde el punto N, corte de la recta F-(F) con la directriz, se traza la tangente a la auxiliar. Se lleva esa longitud sobre la directriz y ese es el punto T de tangencia de la circunferencia cuyo centro es el punto P solución. Por tanto P está en r y en la perpendicular a la directriz desde T.

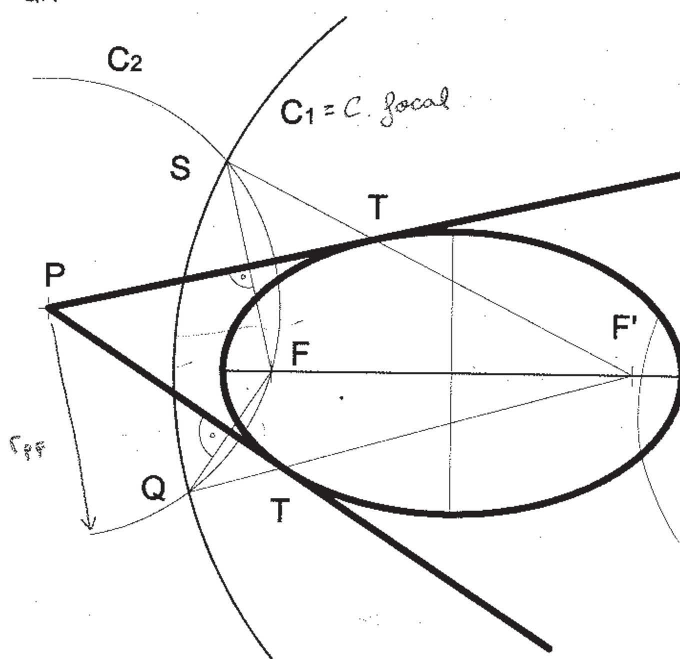


8. TANGENTES A LAS CÓNICAS DESDE UN PUNTO EXTERIOR

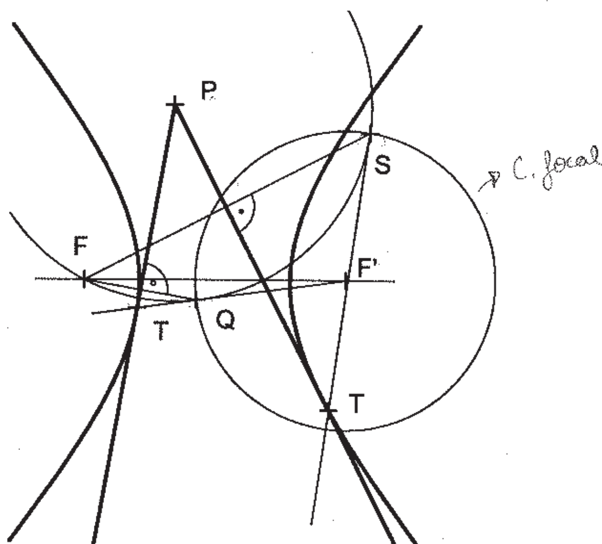
Con centro en F' se traza circunferencia focal C_1. Con centro en P y radio PF se traza la circunferencia C_2, las cuales se cortan en Q y S. Esos puntos son los simétricos de F respecto de las dos rectas tangentes

Si unimos F' con dichos puntos Q y S, esas rectas cortan a la curva en dos puntos que son los de tangencia. Para trazar las tangentes basta unir estos puntos con P.

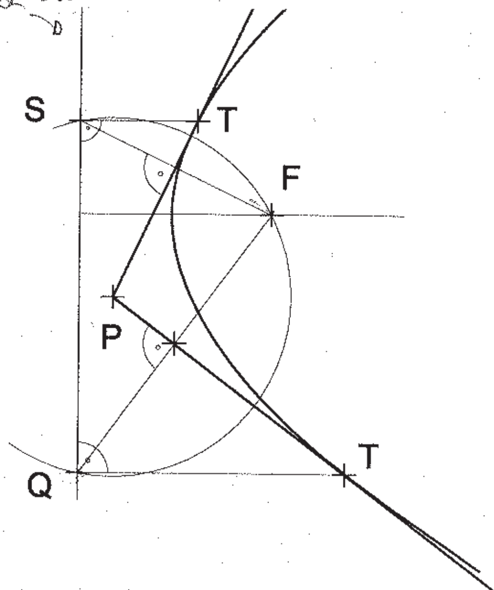
Dichas tangentes también son mediatrices de las rectas SF y QF.



En la hipérbola es similar

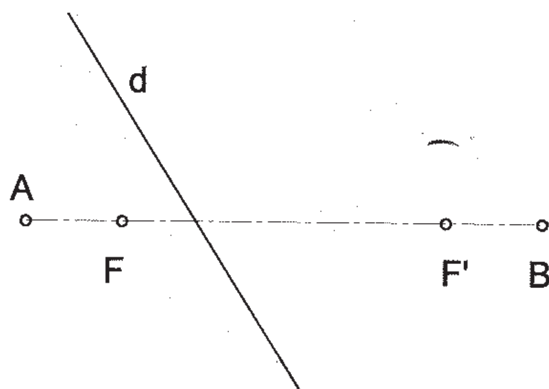


Y en la parábola, la circunferencia focal es la directriz

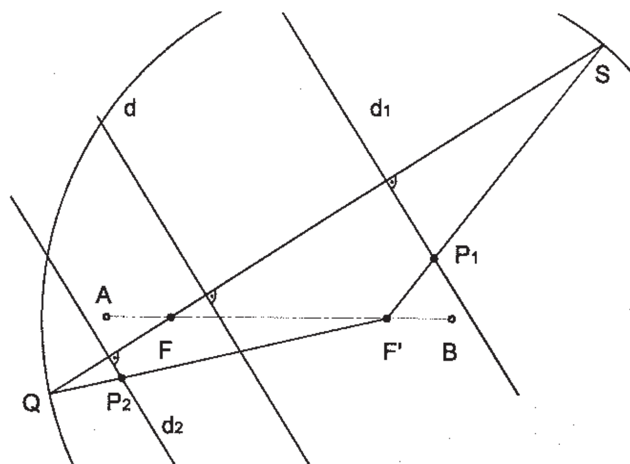


EJERCICIO RESUELTO 2

Se da una elipse por sus focos F-F' y su eje mayor AB. Hallar las tangentes a la elipse que sean paralelas a la recta d, determinando los puntos de tangencia.

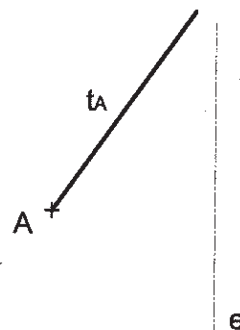


Dibujamos la circunferencia focal con centro en F'. Los simétricos del foco F respecto de las tangentes –de las que sólo conocemos su dirección- está en la circunferencia focal, luego debe ser Q y S. Y las tangente sólo puede ser d1 y d2. Los puntos de tangencia son los puntos de corte de las tangentes con las rectas F'Q y F'S, es decir, P_1 y P_2.



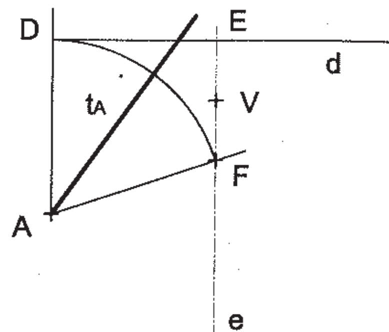
EJERCICIO RESUELTO 3

En el punto A se produce un lanzamiento de un proyectil que sigue una trayectoria parabólica, de la que se conocen el eje **e** y la tangente en el referido punto inicial t_A. Obtener el foco y el punto más alto de la prábola.



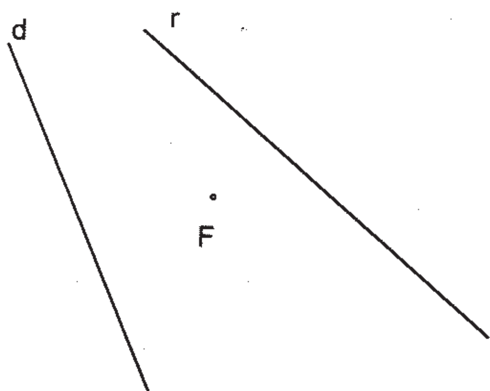
Sabemos que t_A es bisectriz de los radios vectores. Uno de estos radios vectores es paralelo al eje, por lo que es fácil hallar el otro, simétrico de AD respeto de t_A. Este segundo radio vector cortará al eje en F.

Como la distancia de A a F es igual a AD, se puede hallar D y por tanto la directriz d. Por último, la solución es el vértice V, punto medio entre F y E.

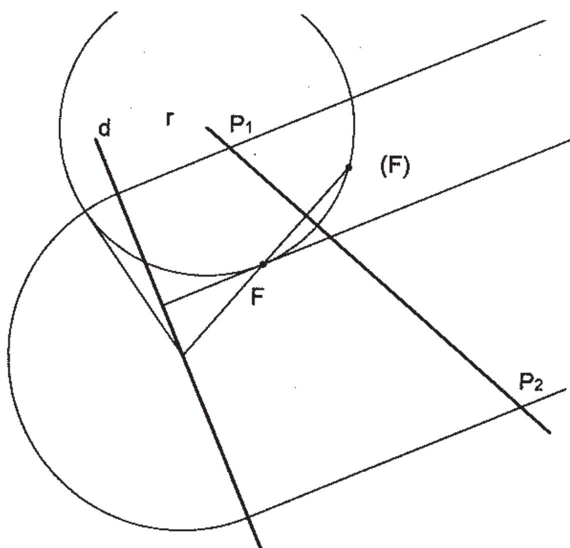


EJERCICIO RESUELTO 4

Determinar los puntos de la recta r que pertenecen a la parábola definida por su directriz d y su foco F, sin dibujar la curva.

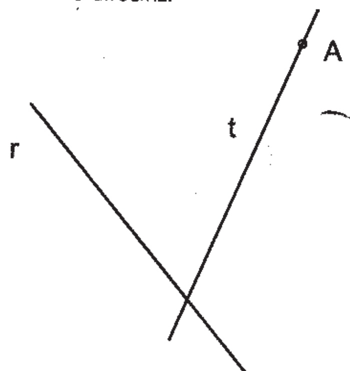


El eje de la parábola pasará por F y será perpendicular a d. Buscamos ahora un punto P de la recta que equidiste de F y de la directriz. Por tanto será el centro de una circunferencia que pase por F, por su simétrico respecto de r, y sea tangente a d, que es un caso de Apolonio que se resuelve por potencia.

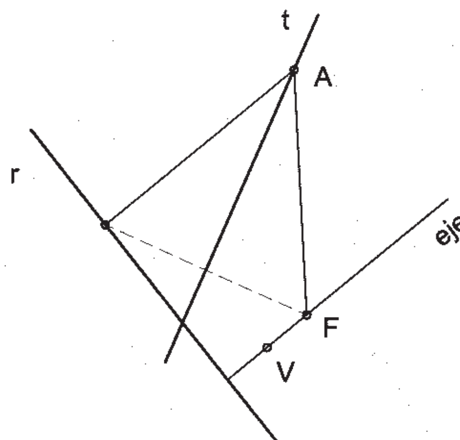


EJERCICIO RESUELTO 5

Determina la posición del foco y del vértice de la parábola que pasa por A, es tangente en dicho punto a la recta t y admite a la recta r como directriz.

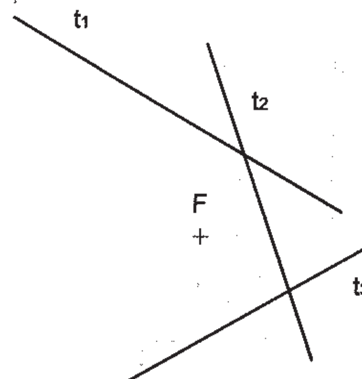


La perpendicular desde A a la directriz r es un radio vector, Dibujamos el simétrico respecto de t y obtenemos el foco F. El eje es perpendicula a r y el vérice V es el punto medio.

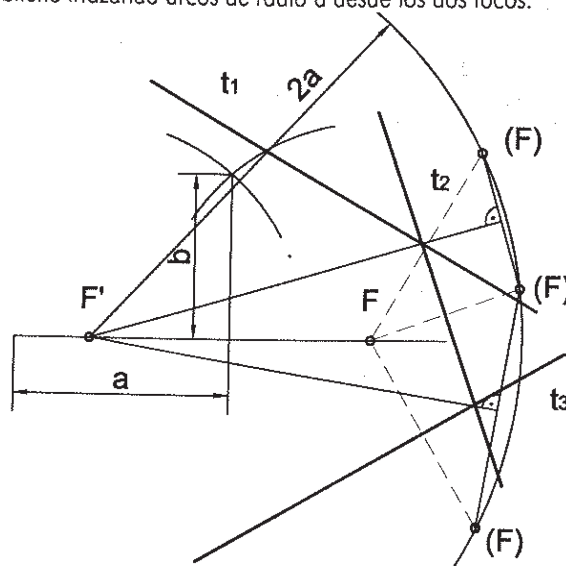


EJERCICIO RESUELTO 6

El punto F es el foco de una elipse, que además es tangente a las rectas t_1, t_2 y t_3. Determinar el foco, el centro y dibujar los ejes de dicha elipse.

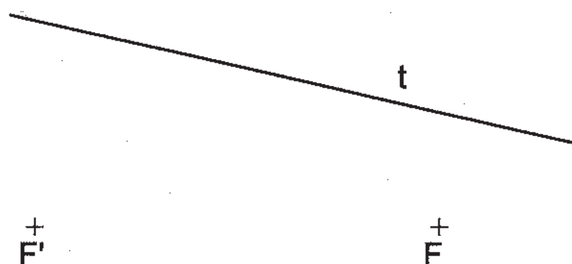


Los puntos simétricos de F respecto a las tres tangentes estarán en la circunferencia focal, cuyo centro es F', que podemos hallar con la intersección de las mediatrices. El centro de la elipse estará en el punto medio de F-F'. El eje mayor 2a es el radio de la circunferencia focal. Y el semieje menor b se obtiene trtazando arcos de radio a desde los dos focos.

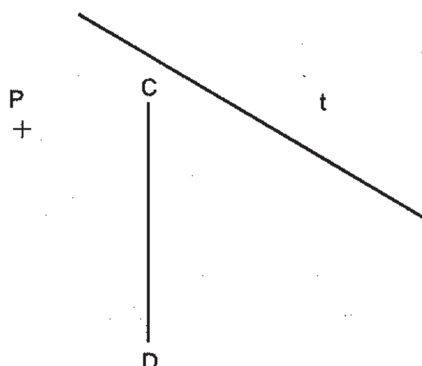


EJERCICIOS PROPUESTOS

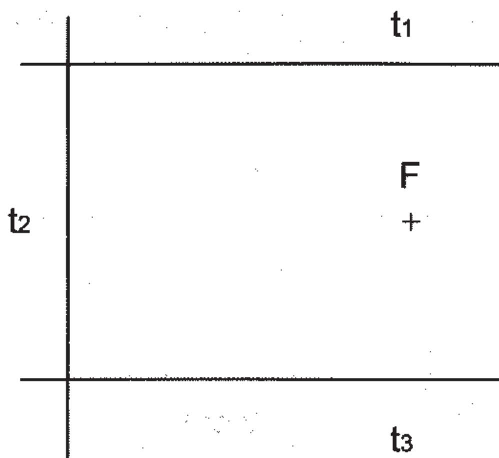
1. Dados los focos F – F' y la tangente t a una elipse, hallar el punto de tangencia y los ejes 2a y 2b.



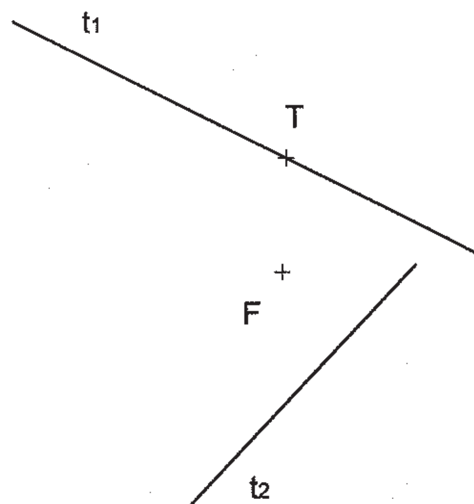
2. Dado el punto P de una elipse y los vértices C y D del eje menor, se pide el punto T de tangencia con la elipse de la recta t.



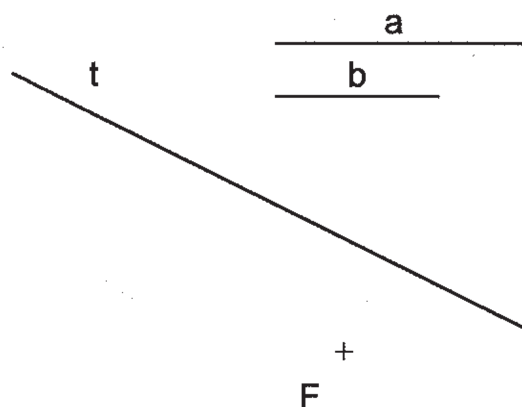
3. Hallar los vértices de la elipse de foco F que tiene por tangentes a las rectas t_1, t_2 y t_3.



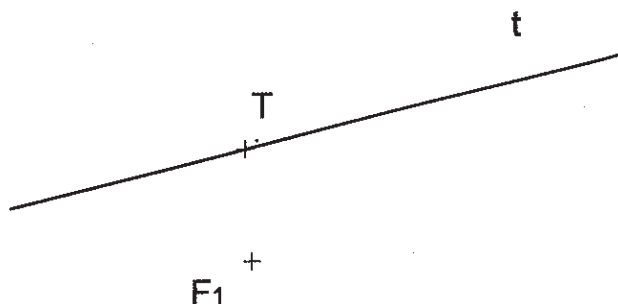
4. Hallar los ejes de la elipse de la que se conoce un foco F, dos tangentes t_1 y t_2 y el punto de contacto T de la tangente t_1.



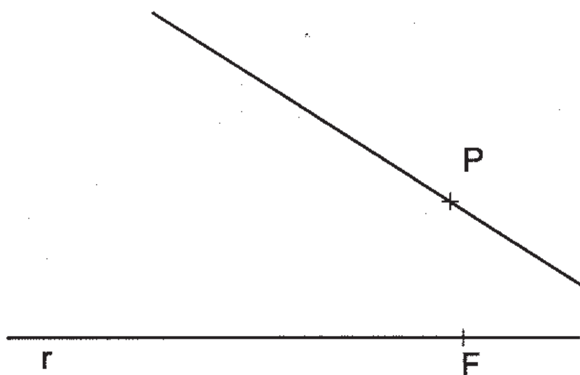
5. Determinar las posiciones de los ejes y el otro foco de una elipse conociendo el foco F, la tangente t y las magnitudes de los ejes a y b. El foco F' se encuentra a la izquierda de F.



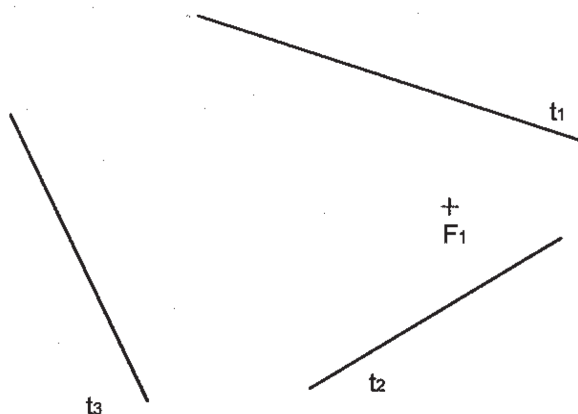
6. Determinar los ejes de la elipse definida por un foco F_1, un punto T y su tangente t, sabiendo que dicho punto dista la mitad de F_1 que de F_2.



7. De una elipse conocemos la recta r que contiene a su eje mayor, un foco F y la tangente en uno de sus puntos P. Dibujar la circunferencia focal de centro el otro foco F' y los ejes y vértices de la citada elipse.



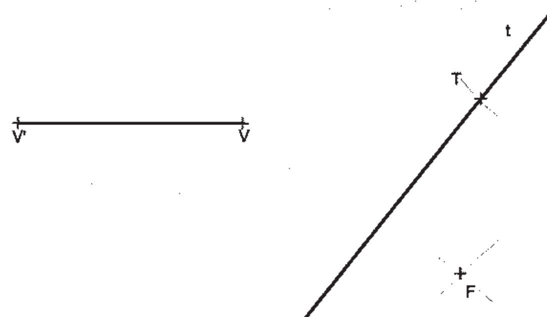
8. Hallar los ejes de una cónica de la que se conoce el foco F_1 y las tangentes t_1, t_2 y t_3. Asimismo obtener los puntos de contacto de las tangentes dadas.



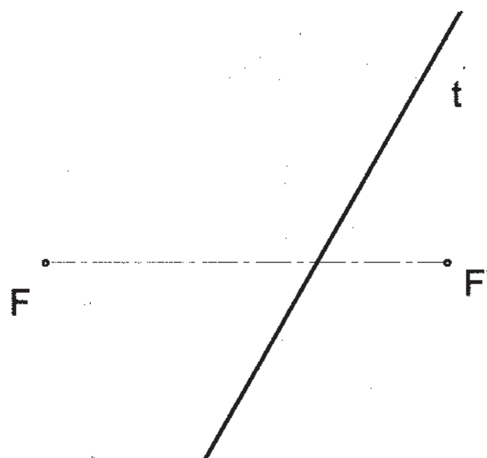
9. Tenemos una hipérbola definida por sus focos F y F' y un punto P de la misma. Dibujar sus asíntotas y la tangente en el punto P.



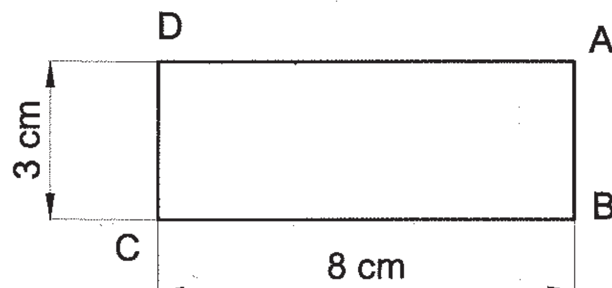
10. Dibujar las asíntotas de una hipérbola conociendo un foco F, la tangente t con su punto de tangencia T y la longitud de su eje real V-V'.



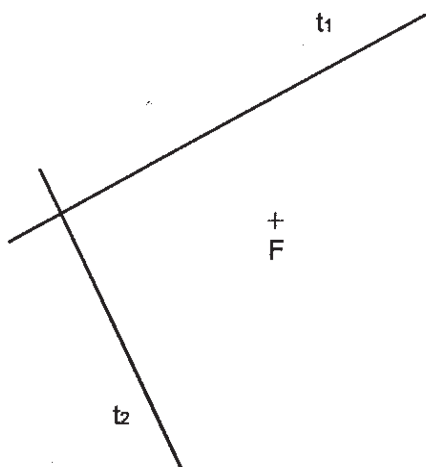
11. Determinar los vértices y las asíntotas de la hipérbola determinada por sus focos F y F', y una tangente t.



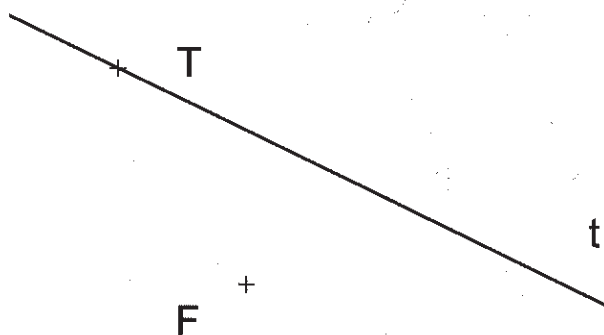
12. El punto A pertenece a una parábola, cuya directriz es la mediatriz del lado AD. El foco está en la recta CB. Dibujar la parábola y trazar las tangentes desde C.



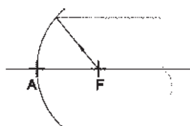
13. El punto F es el foco de una parábola que además, es tangente a las rectas t_1, t_2. Dibujar la directriz y el eje de dicha parábola.

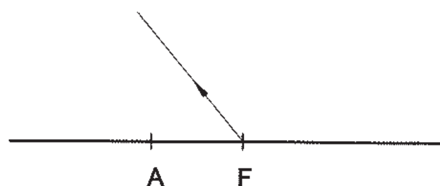


14. Determinar la directriz y el eje de la parábola cuyo foco es F y que es tangente a la recta t en el punto T.

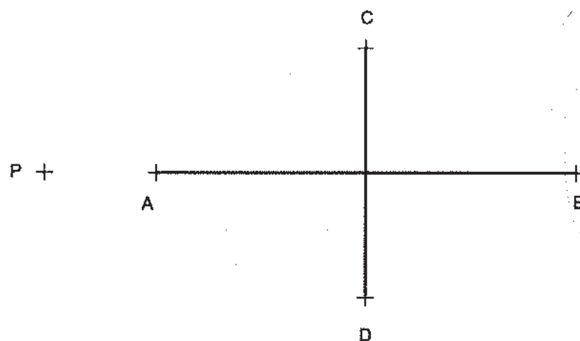


15. Un rayo (impulso lumínico, acústico, etc) incide en una parábola de foco F y vértice A. Obtener con exactitud (sin dibujar la parábola) el punto de incidencia y el rayo reflejado.

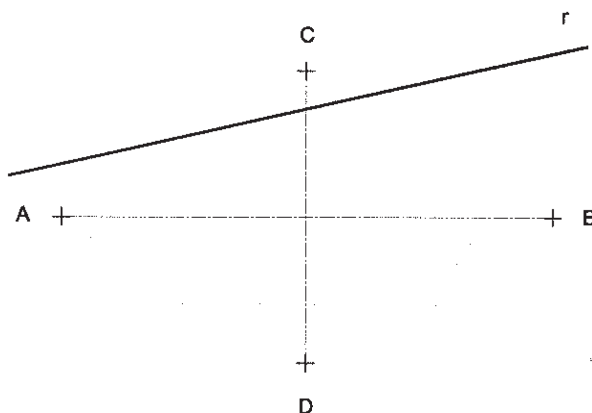




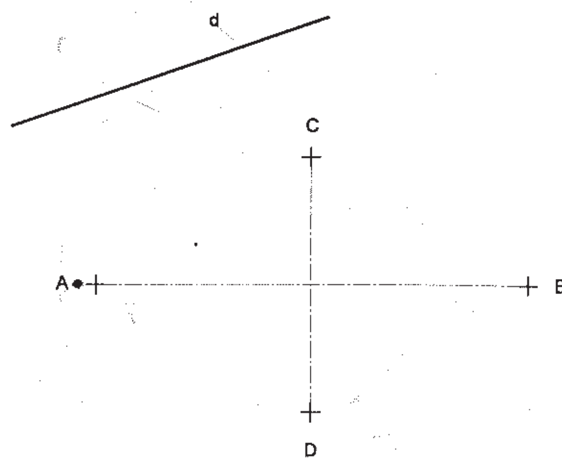
16. Hallar gráficamente las tangentes desde el punto P a la elipse determinada por sus ejes y calcular sus puntos de tangencia.



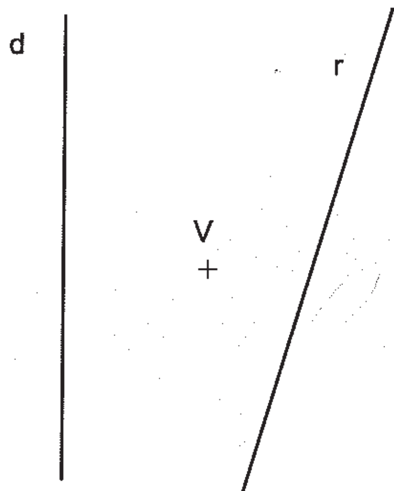
17. Determinar con exactitud los puntos de intersección de la elipse de ejes AB y CD con la recta r dada, sin dibujar la cónica.



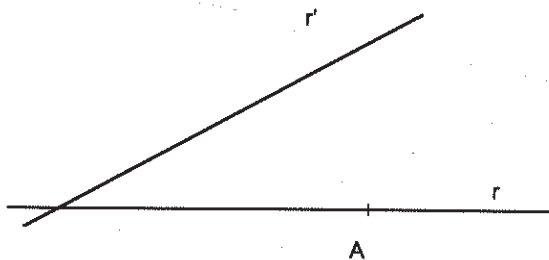
18. Dada una elipse de ejes AB y CD, determinar sus tangentes paralelas a la dirección d. Indicar los puntos de tangencia.



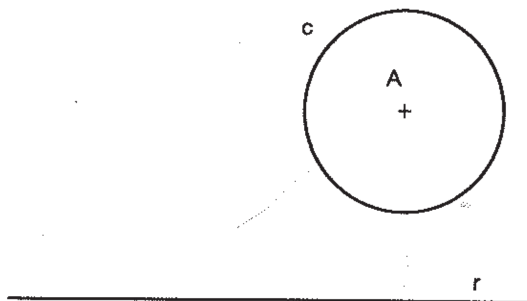
19. Hallar los puntos de intersección de la parábola de vértice V y directriz d con la recta dada.



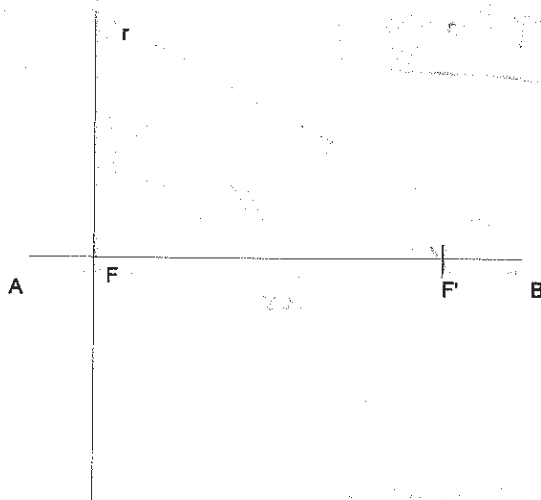
20. Conocemos dos rectas r, r' y un punto A situado sobre r. Hallar sobre esta última recta los puntos que equidistan de A y de r'. Dibujar todas las soluciones posibles.



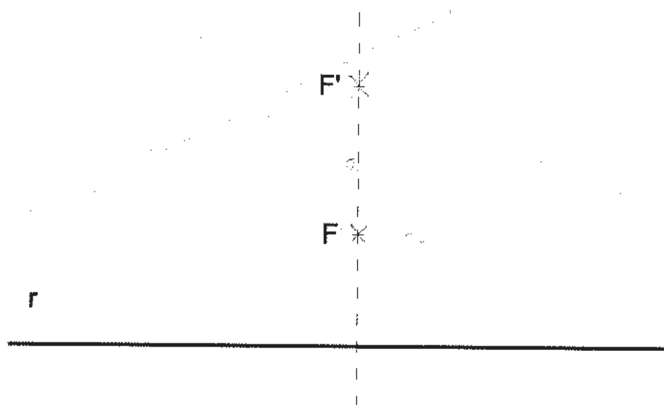
21. Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia c.



22. Dada una elipse por sus focos F-F' y su eje mayor AB, determinar los puntos de intersección de la misma con la recta r, perpendicular a dicho eje.

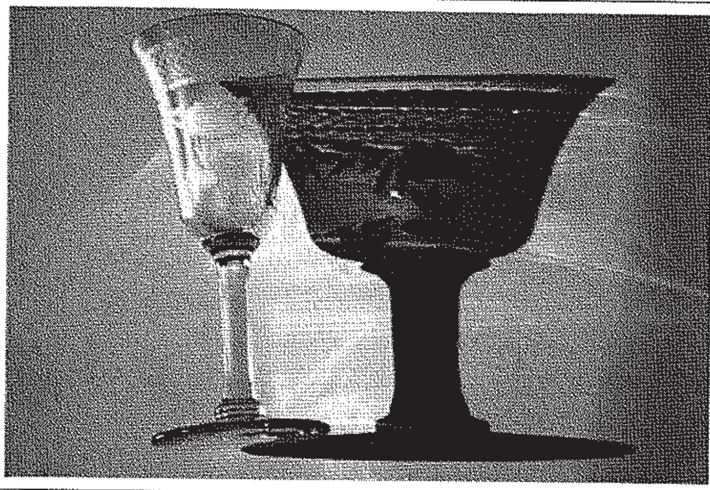


23. Una recta fija **r** es la directriz común de dos parábolas de focos F y F' respectivamente. Obtener los puntos de intersección de las parábolas, sin necesidad de trazar las mismas. Razonar la construcción empleada.



TEMA 10

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

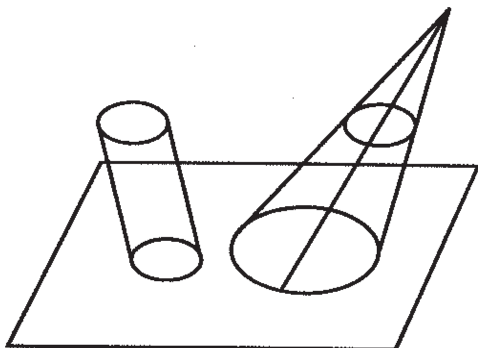


1. REPRESENTACIÓN DE UN OBJETO

El espacio en que nos movemos es de tres dimensiones. Los objetos que hay en él se pueden representar en tres dimensiones con modelos a escala, maquetas, etc., o en un espacio de dos dimensiones, por ejemplo en un papel. En este caso, el procedimiento que se sigue es proyectar cada punto del espacio -o del objeto- sobre un plano, que es nuestra lámina o espacio bidimensional de trabajo.

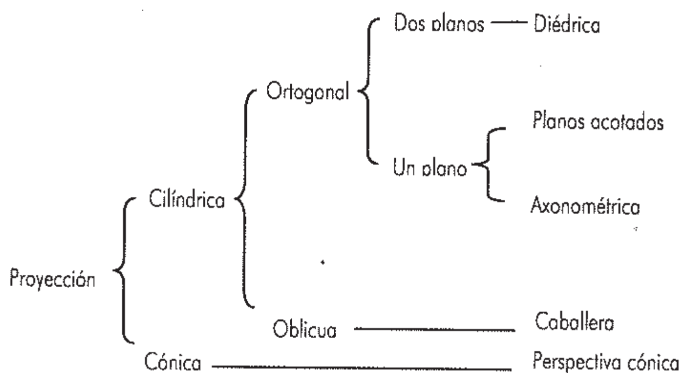
Hay dos tipos de proyección:

- Cónica: los rayos proyectantes parten de un punto fijo.
- Cilíndrica: todos los rayos proyectantes son paralelos a una dirección dada.



La proyección cilíndrica, a su vez, puede ser ortogonal, si la dirección de proyección es perpendicular al plano de proyección, u oblicua, en caso contrario.

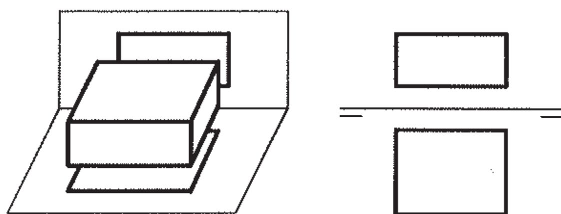
De esta forma, los principales sistemas de representación se pueden clasificar en:



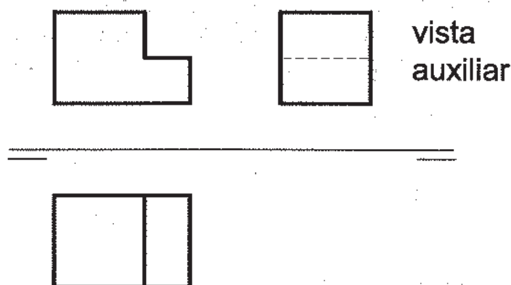
2. APLICACIONES Y VENTAJAS DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Sistema diédrico

Si las direcciones principales de los cuerpos son paralelas a los planos coordenadas, muchas medidas están en verdadera magnitud. Por eso se usa en planos en arquitectura (planta y alzado) y en diseño industrial.



También se emplea para representar las vistas de figuras:

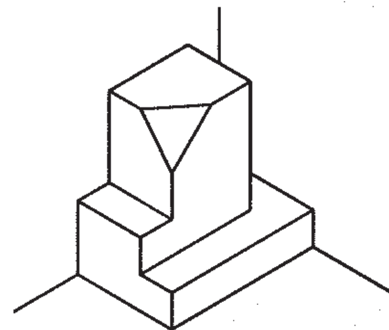


Por último, se usa en la resolución de problemas geométricos, como intersección de planos, cortes de poliedros con un plano, etc.

Sistema axonométrico y perspectiva caballera

Los dibujos resultantes son más representativos del objeto, más claros que en diédrica. Sin embargo, las longitudes no están en verdadera magnitud, aunque pueden tomarse medidas a través de un coeficiente.

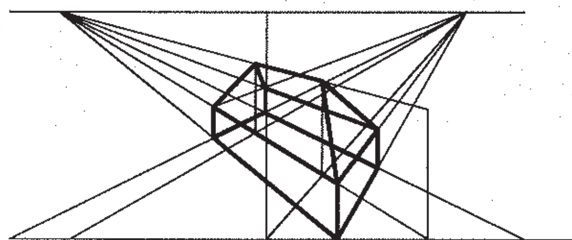
Se utilizan para croquis, diseños publicitarios, representación de piezas mecánicas, etc.



Perspectiva cónica

En objetos grandes (edificios, paisajes, etc.), la representación en perspectiva cónica es más parecida a la realidad. Por eso se utiliza en arquitectura, decoración, pintura, ingeniería, etc. Por ejemplo, para ver la interrelación de las obras públicas con su entorno, ver el aspecto exterior de un edificio, etc. En la representación de interiores se usa mucho la cónica central, ya que es la única que permite ver a la vez tres paredes, el suelo y el techo.

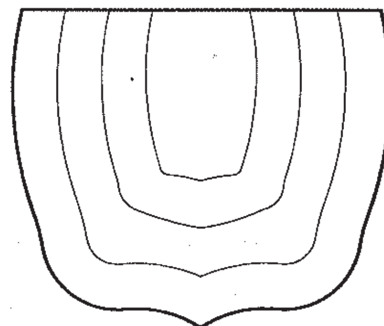
Tiene el inconveniente de que las medidas no están en verdadera magnitud, y trabajar con ellas tiene cierta complicación.



Planos acotados

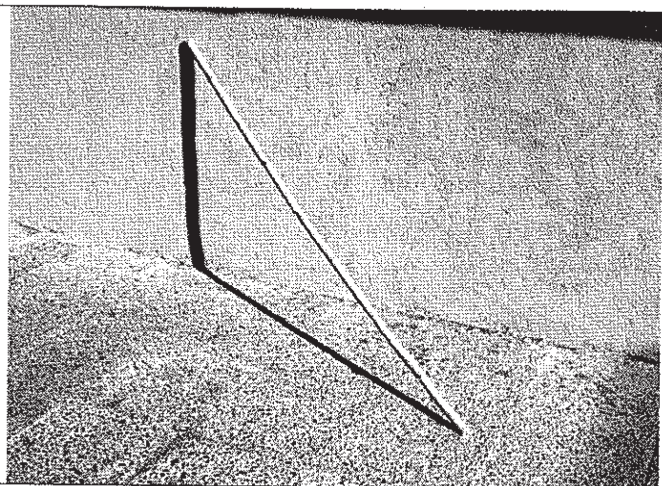
Es un sistema idóneo cuando las medidas verticales son mucho más pequeñas que las horizontales, o en la representación de superficies muy irregulares.

Se utiliza en topografía, meteorología (mapas de curvas isobaras) y en ingeniería (en la representación de superficies alabeadas, como por ejemplo cascos de barcos, hélices, etc.)



TEMA 11

SISTEMA DIÉDRICO I



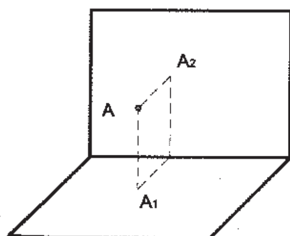
1. INTRODUCCIÓN

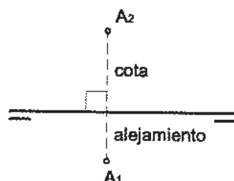
Sistema diédrico es el sistema de representación basado en la proyección cilíndrica ortogonal sobre dos planos perpendiculares, llamados planos coordenadas. Además, uno de estos planos se abate sobre el otro después de la proyección, para tener todo el resultado sobre un único plano.

Elementos

Los elementos principales de este sistema son:

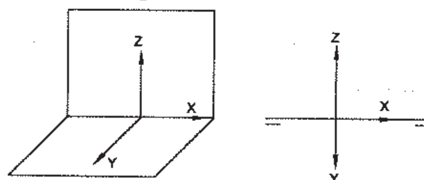
• Planos coordenados: plano horizontal PH, y plano vertical PV.
• Línea de tierra, LT: es la intersección del PV con el PH. Un punto A tiene dos proyecciones, la horizontal A_1 y la vertical A_2. La línea que une esas dos proyecciones es siempre perpendicular a la LT.
• Cota y alejamiento: son las distancias del punto al PH y al PV respectivamente, y coincide con las distancias entre la LT y A_2 y A_1.





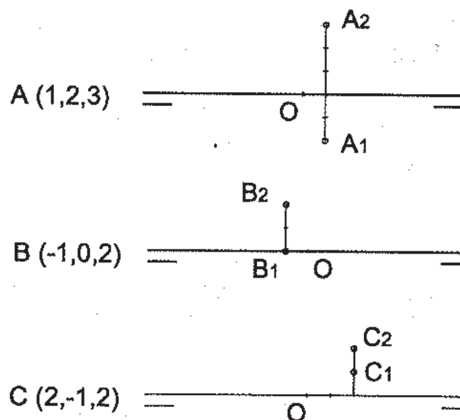
2. REPRESENTACION DEL PUNTO

Para representar un punto del espacio, se coge el siguiente sistema de coordenadas: el origen se toma en un punto de la LT, normalmente centrado. El eje x va sobre la LT, el eje y en el PH y el z en el PV. Por tanto, en diédrica, el eje y (con la parte positiva hacia abajo) y el eje z (con la parte positiva hacia arriba) están en prolongación,



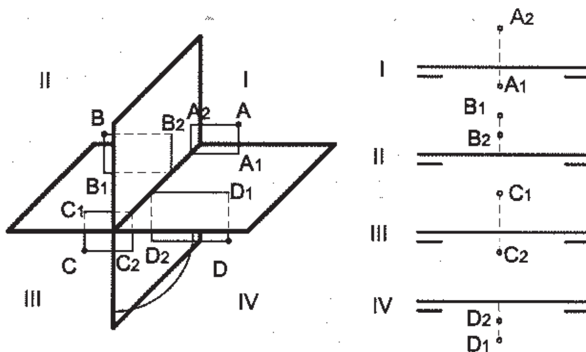
EJERCICIO RESUELTO 1

Dibujar los siguientes puntos dados por sus coordenadas:



Situación del punto en los diversos cuadrantes (alfabeto del punto)

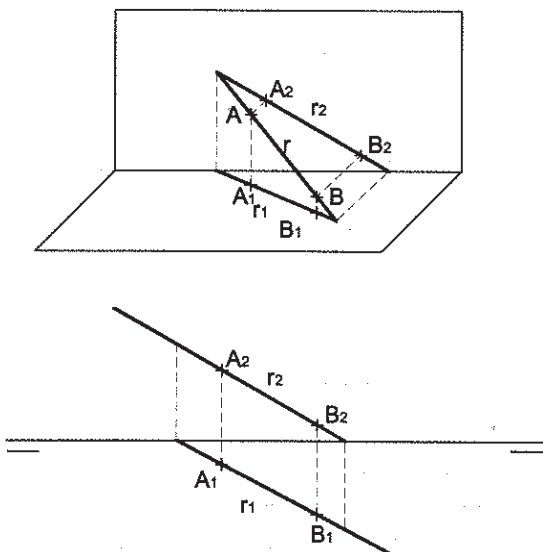
Por las posiciones de las proyecciones del punto podemos saber en qué cuadrante está. Se ve claramente en el dibujo siguiente.



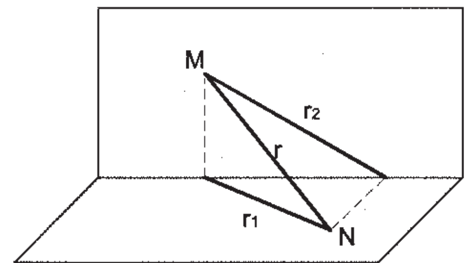
Los puntos del primer cuadrante tienen la proyección horizontal A_1 por debajo de la LT, y la proyección vertical A_2 por encima de la LT.
Los puntos del segundo cuadrante tienen las dos proyecciones B_1 y B_2 por encima de la LT.
Los puntos del tercer cuadrante tienen la proyección horizontal C_1 por encima de la LT, y la proyección vertical C_2 por debajo de la LT.
Por último, los puntos del cuarto cuadrante tienen las dos proyecciones D_1 y DB_2 por debajo de la LT.

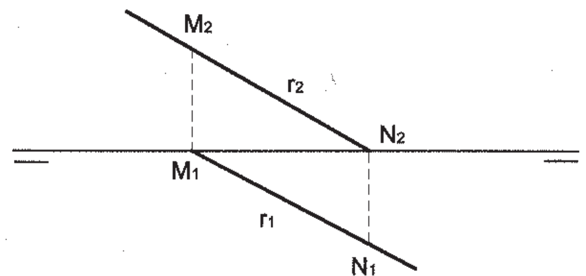
3. LA RECTA

Toda recta r se represento por sus dos proyecciones r_1 y r_2. Un punto pertenece a una recta si sus proyecciones A_1 y A_2 están en las proyecciones r_1 y r_2 de la recta.

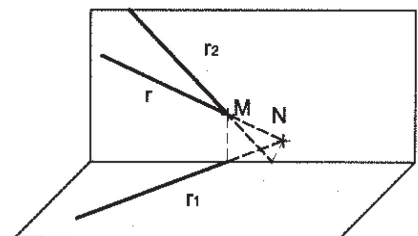


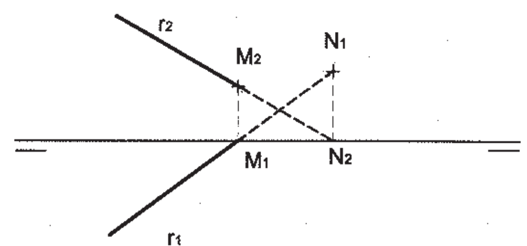
Se llaman trazas de una recta a los puntos donde la recta r corta a los planos coordenados PH y PV. Para hallar las trazas basta prolongar r_1 y r_2 hasta la LT y subir o bajar perpendicularmente a la LT hasta que corte a la otra proyección.





O en este otro caso:





Paso de la recta por los diversos cuadrantes

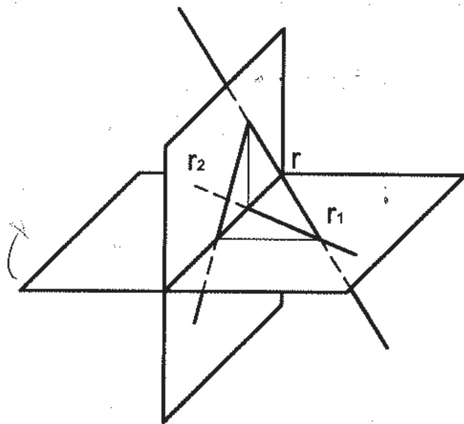
En general una recta pasa por tres cuadrantes, siendo los puntos de paso las trazas de la recta.

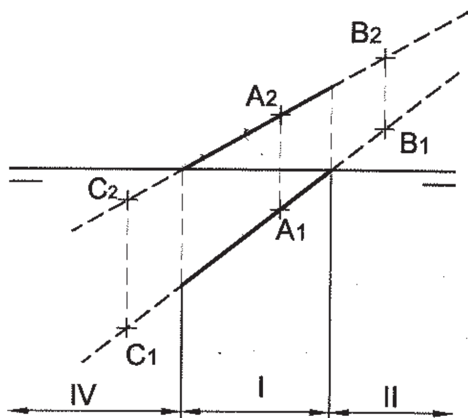
Una recta pasa sólo por dos cuadrantes cuando corta a la LT o es paralela a un plano coordenado.

Pasa sólo por un cuadrante cuando es paralela a la LT.

Para estudiar el paso de la recta por los diversos cuadrantes, se divide la recta en segmentos, separados por las trazas. Se coge un punto cualquiera de cada segmento y, por la posición

de sus proyecciones, se ve en qué cuadrante está. Lógicamente, todo el segmento estará en ese cuadrante.

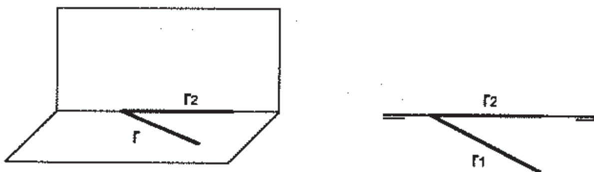




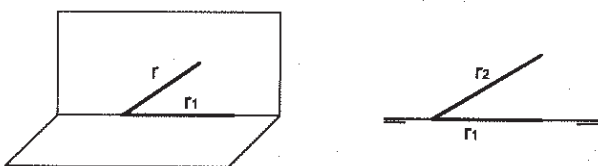
Rectas especiales

Veamos cómo se representan en diédrica algunas rectas con posiciones especiales:

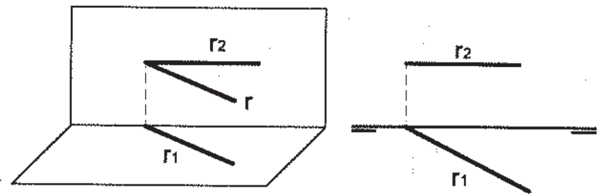
a) **Recta contenida en el PH:** r_2 está en la LT.



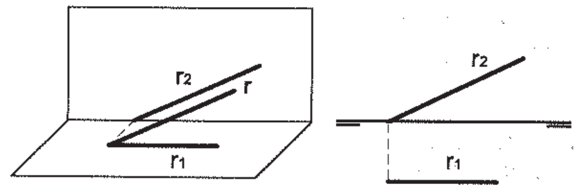
b) **Recta contenida en el PV:** r_1 está en la LT.



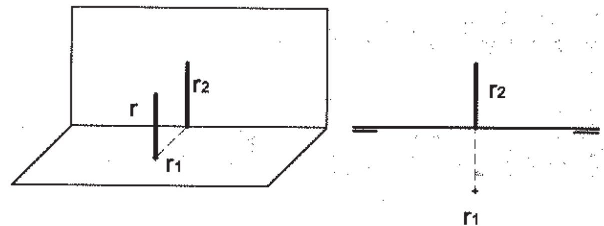
c) **Recta horizontal:** es aquella que es paralela al PH. Tiene r_2 paralela a la LT y r_1 paralela a la recta.



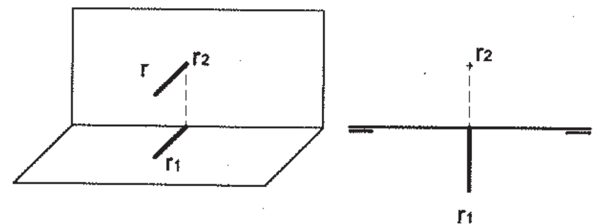
d) **Recta frontal:** es toda recta que es paralela al PV. Tiene r_1 paralela a la LT y r_2 paralela a la recta.



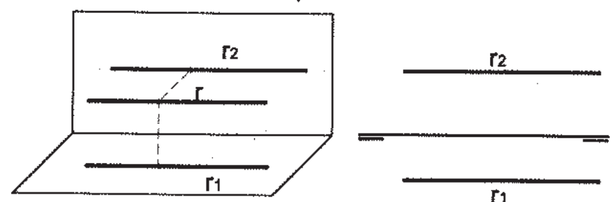
e) **Recta vertical:** es aquella que es perpendicular al PH. La proyección r_1 queda reducida a un punto, y r_2 es vertical.



f) **Recta de punta:** es cualquier recta perpendicular al PV. La proyección r_2 queda reducida a un punto, y r_1 es perpendicular a la LT.



g) **Recta paralela a la LT**

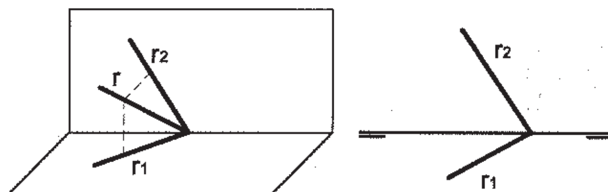


h) **Recta de perfil**: se llama así a la que es perpendicular a la LT. Las dos proyecciones son perpendiculares a la LT.



Hay muchas rectas que tienen las mismas proyecciones, por lo que hay que dar las proyecciones de dos puntos de la recta. Trabajar con ellas tiene cierta dificultad, al menos al principio. Más adelante veremos cómo trabajar con ellas.

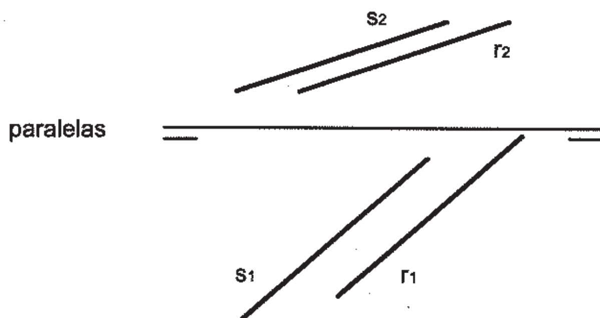
i) **Recta que pasa por la LT**: las dos proyecciones se cortan en un punto de la LT.



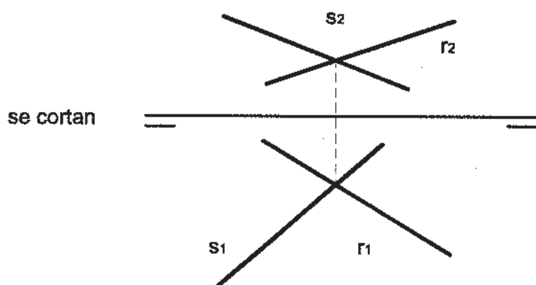
Posiciones posibles entre rectas

Dos rectas en el espacio pueden:

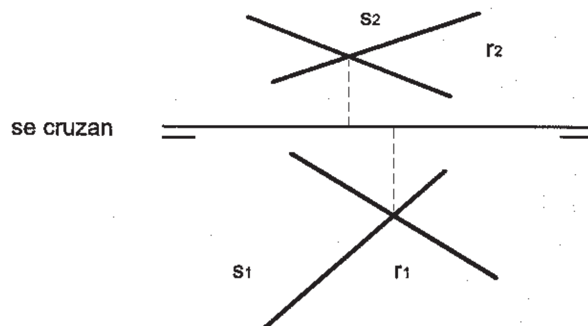
• ser **paralelas**, si sus proyecciones diédricas son paralelas: r_1 paralela a s_1, y r_2 paralela a s_2.



• **cortarse**: son las que tienen un punto en común; por tanto, el punto de corte de s_1 con r_1, y el de s_2 con r_2 deben estar en una misma vertical, para que sean las proyecciones diédricas de un punto.

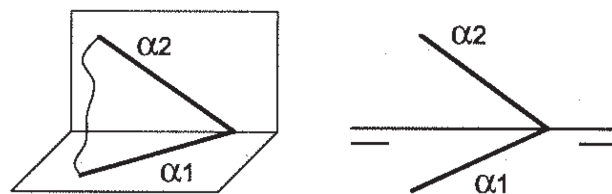


• **cruzarse**: en ese caso no tienen ningún punto en común. El punto de corte de s_1 con r_1, y el de s_2 con r_2 no están en una misma vertical, por lo que no son las proyecciones de ningún punto.

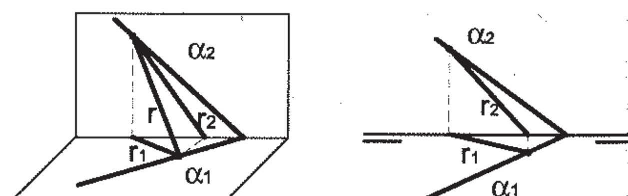


4. EL PLANO

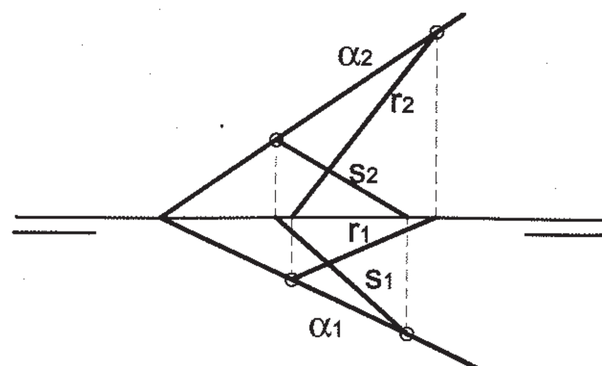
Un plano en diédrica se representa por sus dos trazas, que siempre se cortan en la LT. Se suelen nombrar con letras griegas.



Cualquier recta contenida en un plano debe tener sus trazas en las trazas del plano, como se ve en la siguiente figura:



Para dibujar las trazas de un plano definido por dos rectas que se cortan, basta unir las trazas de las rectas:



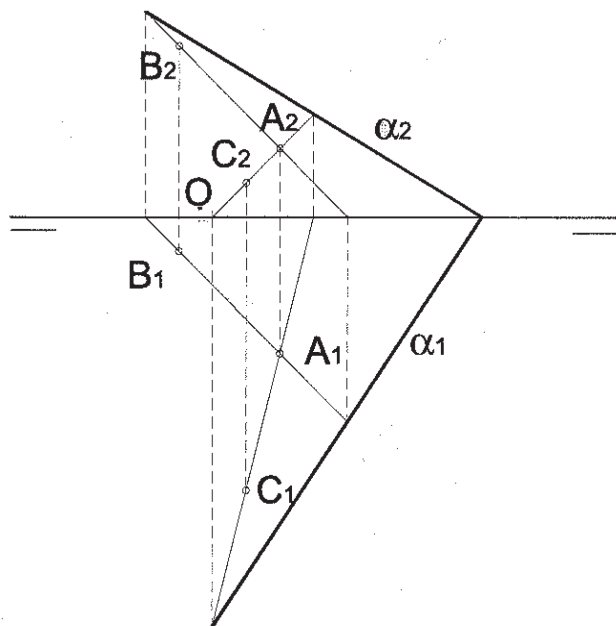
Determinación de un plano

Un plano queda determinado por:

a) dos rectas que se cortan
b) tres puntos no alineados
c) una recta y un punto no contenido en ella
d) dos rectas paralelas.

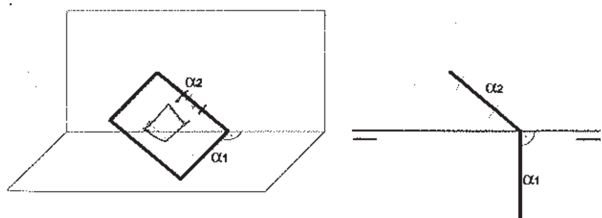
Acabamos de ver cómo dibujar el plano en el primer caso. El caso b) se reduce al primero cogiendo dos de las posibles rectas que definen esos tres puntos. El caso c) se convierte también al primero uniendo el punto dado con otro cualquiera de la recta. Finalmente el último caso se reduce a uno del apartado a) en el que el punto de corte está en el infinito.

EJERCICIO RESUELTO 2
Dibujar en diédrica el plano que contiene a los tres puntos A(2, 4, 2), B(- 1, 1, 5) y C(1, 8, 1).

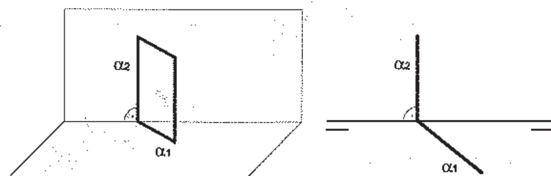


Planos especiales.

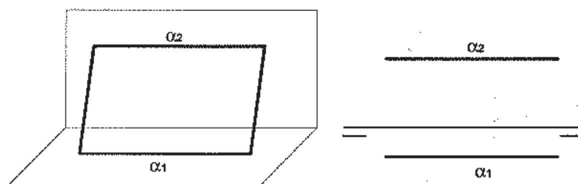
a) **Plano de canto (plano proyectante sobre el PV)**: es el plano que es perpendicular al PV. La traza α_1 es perpendicular a la LT, y todos sus puntos tienen la proyección vertical en α_2.



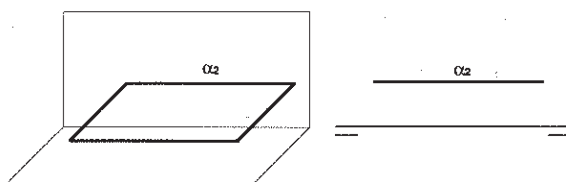
b) **Plano vertical (plano proyectante sobre el PH)**: es el que es perpendicular al PH. En este caso α_2 es perpendicular a la LT, y todos sus puntos tienen la proyección horizontal en α_1.



c) **Plano paralelo a la LT**: las dos trazas son paralelas a la LT.



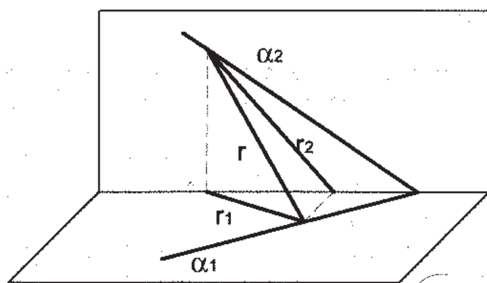
d) **Plano horizontal**: es aquel que es paralelo al plano horizontal de referencia PH. Su traza α_2 es paralela a la LT y α_1 está en el infinito.

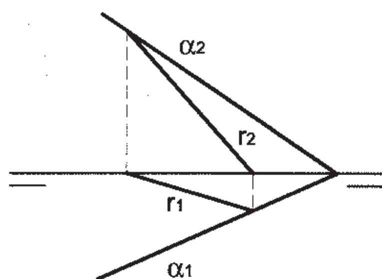


5. RECTAS DEL PLANO

Recta contenida en un plano

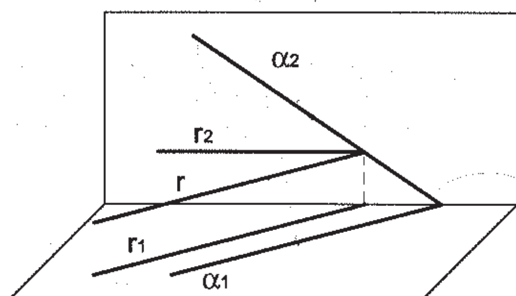
Una recta está contenida en un plano si las trazas de la recta están en las trazas del plano.

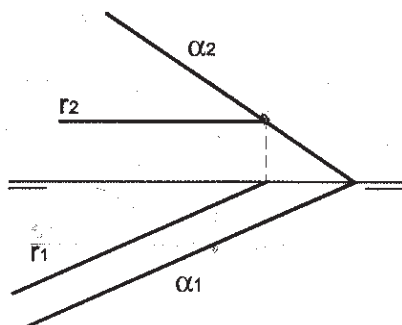




Recta horizontal de un plano

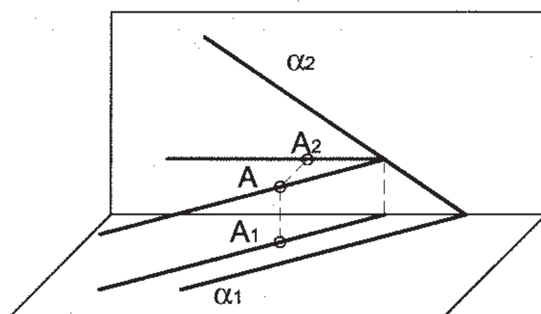
Recta horizontal de un plano es aquella que, como su nombre indica, es del plano y es horizontal. Su proyección horizontal r_1 es paralela a la traza horizontal α_1 del plano, y la proyección vertical r_2 es paralela a la LT. Como la recta es paralela al PH, la traza horizontal está en el infinito.

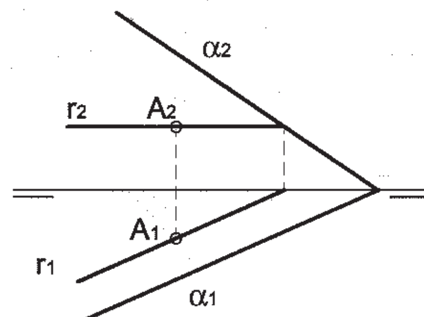




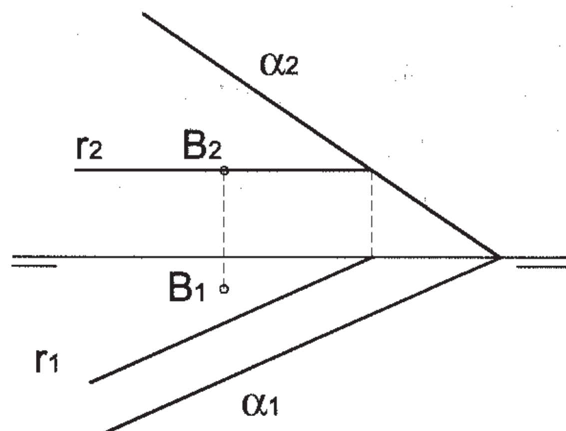
Hay infinitas rectas horizontales de un plano. Por cualquier punto del plano se puede trazar una de ellas. Esto nos sirve para ver si un punto está o no en un plano: la condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a un plano es que esté en una recta horizontal de dicho plano.

Veamos dos ejemplos:

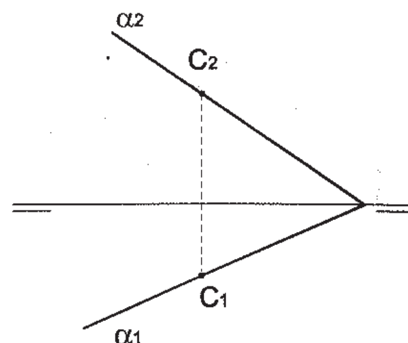




En este caso, el punto A pertenece al plano α, ya que hay una recta horizontal del plano que contiene a las proyecciones A_1 y A_2.
En el siguiente caso, al tratar de dibujar una horizontal del plano por B_2, su proyección horizontal no pasa por B_1, por lo que el punto B no pertenece al plano α.

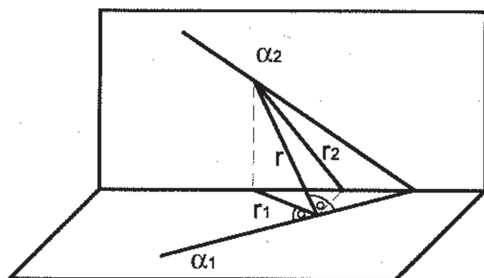


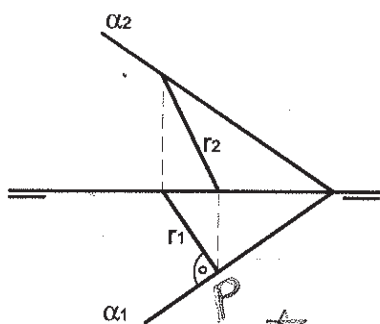
Por tanto, si un punto tiene sus proyecciones A_1 y A_2 sobre las trazas α_1- α_2 de un plano, **nunca estará en el plano**, sólo si el punto está en la LT. Por ejemplo, el punto C no está en el plano.



Recta de máxima pendiente de un plano

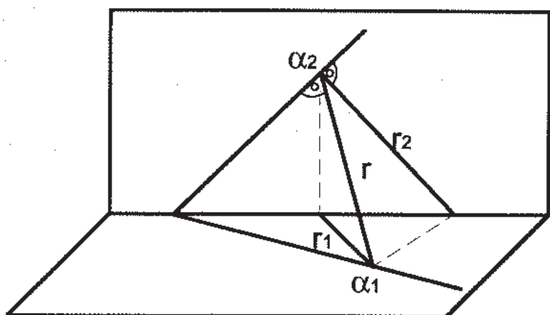
Es aquella recta del plano que es perpendicular a la traza horizontal α_1. Su proyección horizontal r_1 es perpendicular a α_1 pero la vertical no, aunque debe estar situada de tal forma que las trazas de la recta estén en α_1 y α_2 para que la recta esté en el plano.

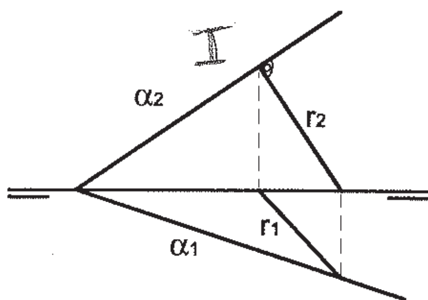




Recta de máxima inclinación de un plano

Es aquella recta del plano que es perpendicular a la traza vertical del plano α_2. Su proyección vertical r_2 es perpendicular a α_2, y la horizontal debe ser tal que la recta esté en el plano.

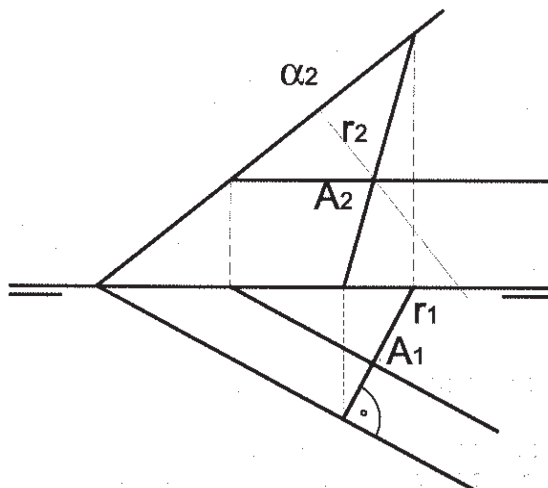




EJERCICIO RESUELTO 3

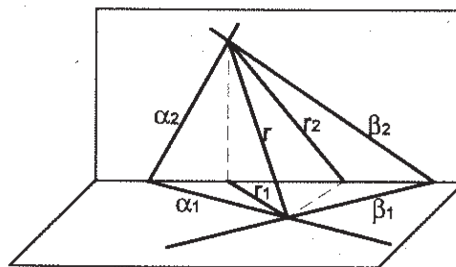
Dado el plano α, situar un punto A que esté contenido en él y trazar una recta r de máxima pendiente que pase por A.

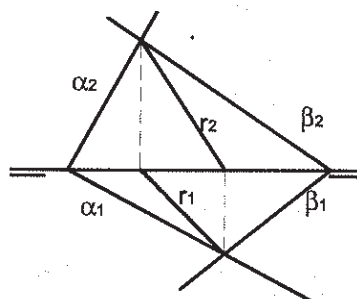
Cogemos un punto A_2 cualquiera. Trazamos por él una horizontal del plano y bajamos una vertical desde A_2 hasta que corte a esa recta, que será A_1.
Para hallar la recta de máxima pendiente, trazamos por A_1 una recta perpendicular a α_1, que será r_1. Hallamos sus trazas sabiendo que deben estar en α_1 y α_2 con lo que sale r_2.



6. INTERSECCIÓN DE PLANOS

La intersección de dos planos es una recta que pertenece a ambos planos. Las trazas de dicha recta estarán en las trazas de ambos planos, por lo que las proyecciones de esa recta se hallan uniendo la intersección de las trazas de los dos planos.





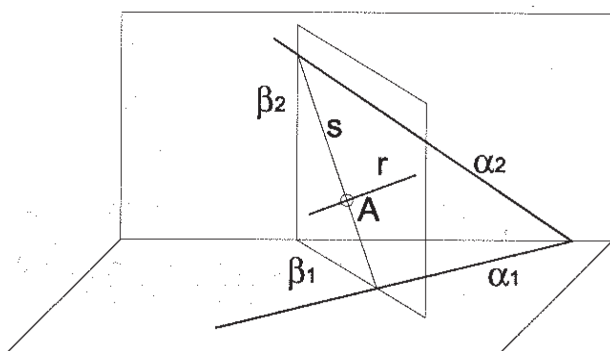
7. INTERSECCION DE RECTA Y PLANO

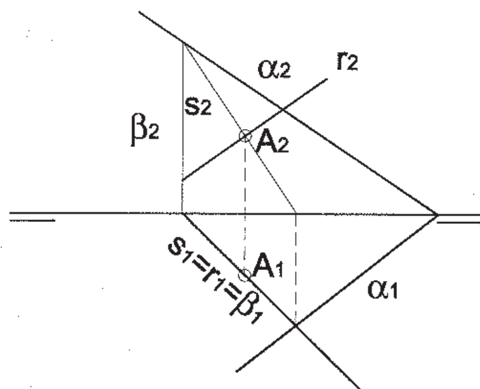
La intersección de un plano α y una recta r es un punto que normalmente no se puede hallar de forma inmediata. Hay que seguir estos tres pasos:

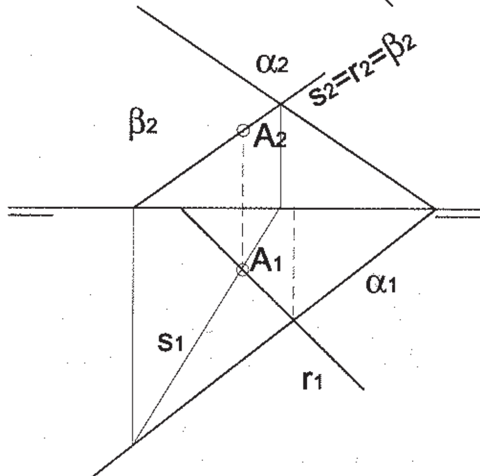
1.Se traza un plano β que contenga a la recta r. El más sencillo es uno de los dos proyectantes. En la figura inferior se ha hecho con los dos planos, pero sólo es necesario uno de los dos.

2.Se halla la intersección de β con el plano α lo que nos da una recta s.

3. Se halla el punto intersección de esta recta s con la que nos dan r. Ese punto A será la solución.

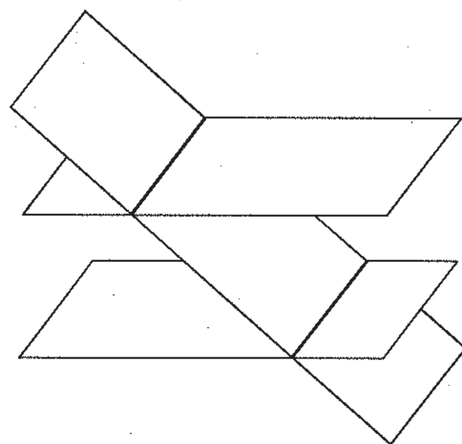






Cortes de cuerpos en diédrica

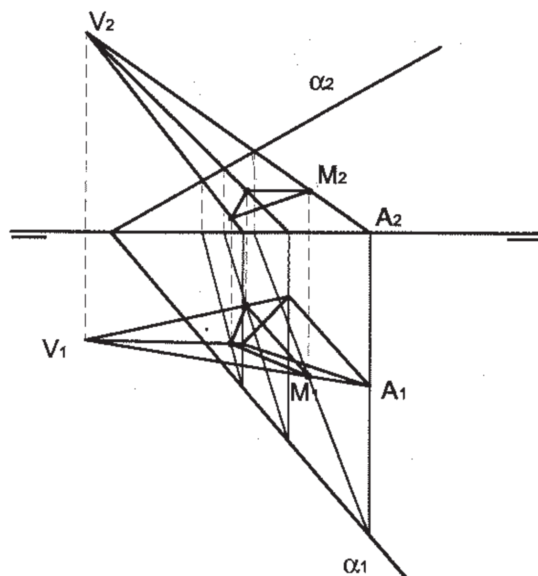
Dado un poliedro y un plano que lo corta, la intersección o corte se halla arista a arista, aplicando lo que acabamos de ver sobre intersección de recta y plano. Se debe tener en cuenta que dos planos paralelos (por ejemplo dos caras del poliedro) cortados por un plano (plano de corte) dan dos rectas paralelas. Por otra parte, es evidente que todo el corte estará en el plano de corte.



EJERCICIO RESUELTO 4

Hallar el corte que el plano α produce a la pirámide dada.

Cogemos una arista VA, que tiene como proyección horizontal r_1 la recta V_1A_1, y de proyección vertical r_2 la recta V_2A_2. Hallamos la intersección de esta recta con el plano α, con los tres pasos que hemos visto anteriormente, y obtenemos el punto M. De la misma forma hacemos con las otras dos aristas, con lo que hallamos el triángulo intersección buscado, tanto en su proyección horizontal como vertical.

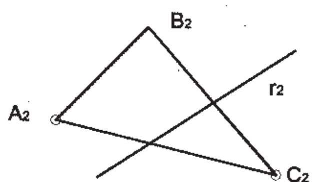


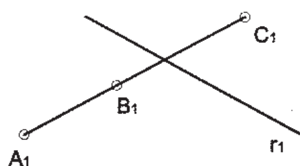
8. PLANOS PROYECTANTES

Se llama plano proyectante al plano que es perpendicular a uno de los dos planos de referencia. Hay planos proyectantes sobre el PH y planos proyectantes sobre el PV. Se llaman así porque contienen a la proyección de un punto o una recta que esté en ese plano. Una traza siempre es perpendicualr a la LT. Tienen muchas ventajas que facilitan su uso. Por ejemplo, todo el plano se proyecta en una traza, es deir, las proyecciones de todos los objetos que contiene el plano, están en la traza sobre la que se proyecta.

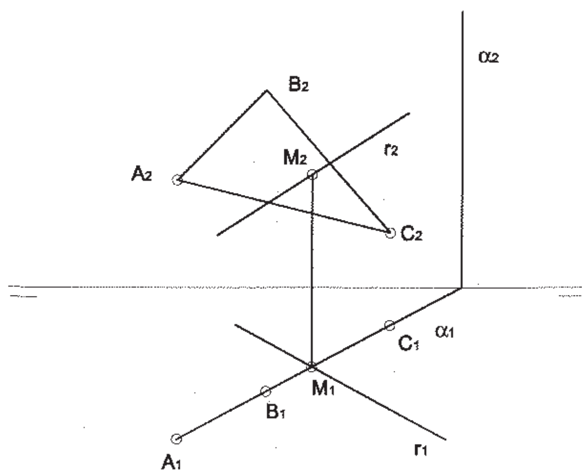
EJERCICIO RESUELTO 5

Hallar el punto de intersección de la recta r y el plano definido por los puntos A, B y C.



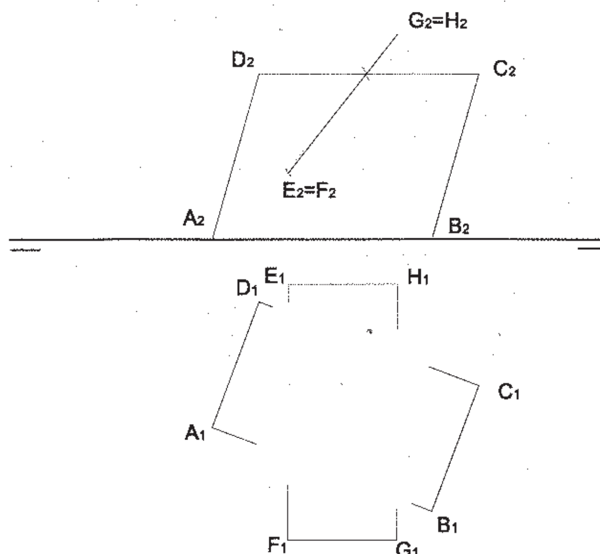


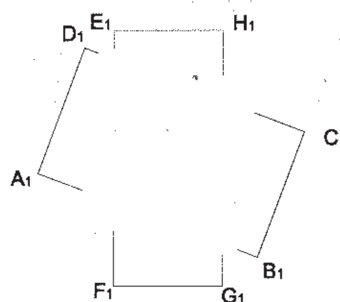
El plano que contiene a los puntos A, B y C es proyectante sobre el PH. Por tanto sus trazas son α_1 y α_2. Como todo el plano está contenido en α_1, la intersección con r es inmediata: es el punto de corte de r_1 con α_1.



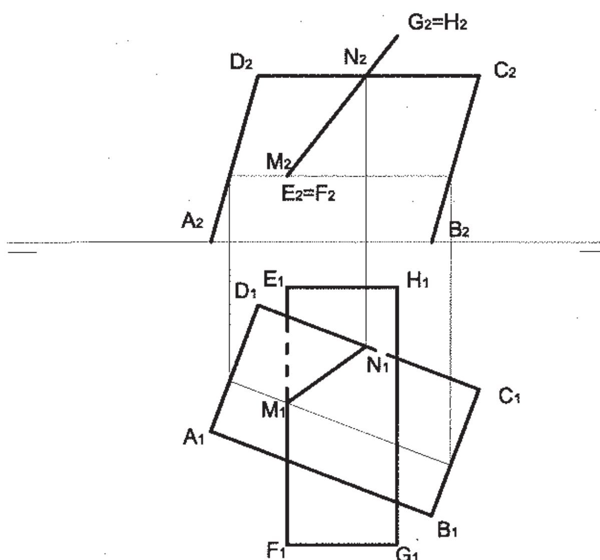
EJERCICIO RESUELTO 6

Determinar la intersección de los paralelogramos ABCD y EFGH y completar la representación indicando con claridad la visibilidadd de sus aristas, considerando los planos opacos.



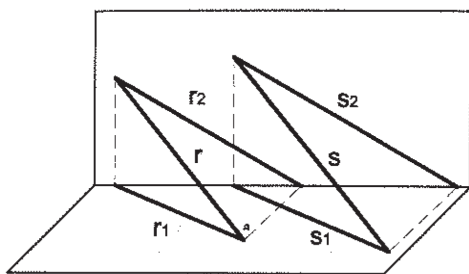


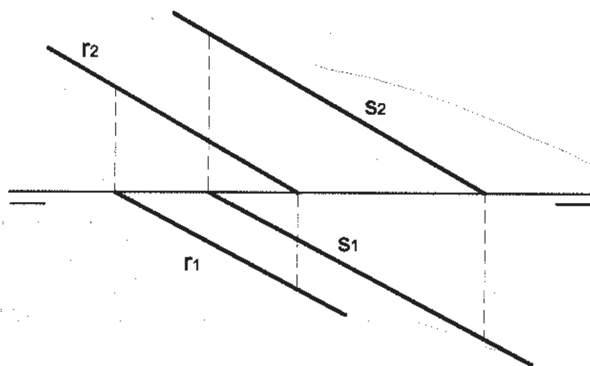
El plano EFGH es proyectante sobre el PV. Por tanto el corte de ese plano con el segmento CD es inmediato N. Para ver el corte de EF, trazamos una recta horizontal del plano ABCD, que pase por la parte inferior. El corte es inmediato M.



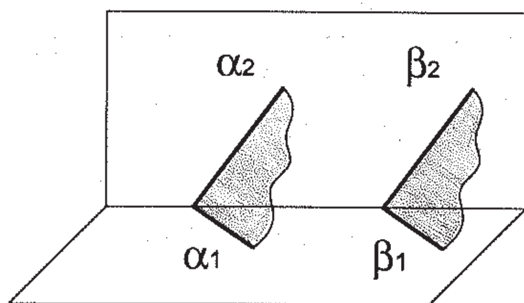
9. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

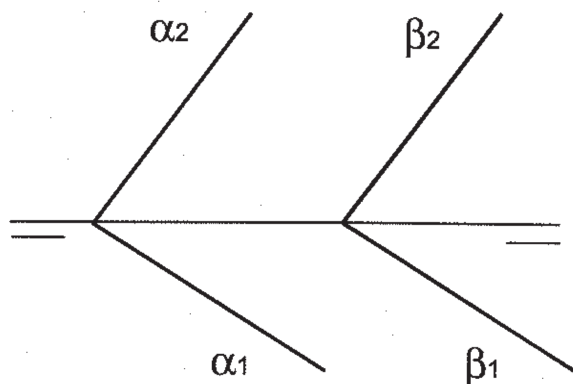
Rectas paralelas: dos rectas son paralelas cuando sus proyecciones son paralelos. Su intersección está en el infinito. No es necesario que la distancia entre las proyecciones r_1 y s_1 sea la misma que la distancia entre r_2 y s_2.





Planos paralelos: su intersección está en el infinito, por lo que sus trazas son paralelas. Tampoco es necesario que la distancia entre las trazas horizontales α_1 y β_1 sea la misma que la distancia entre las trazas verticales α_2 y β_2.

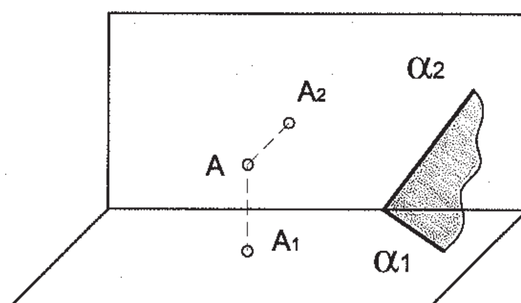


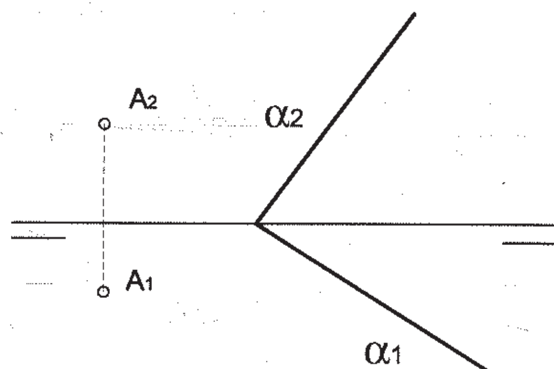


Recta paralela a un plano: su intersección está en el infinito. Bastará con que la recta sea paralela a una recta del plano.

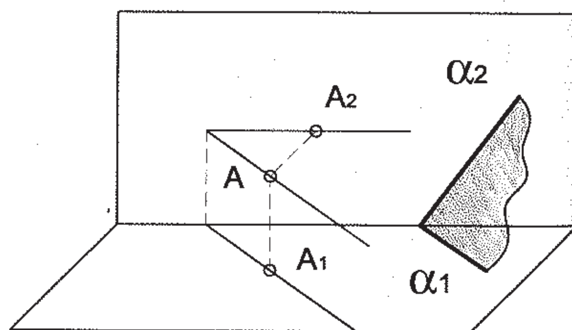
EJERCICIO RESUELTO 7

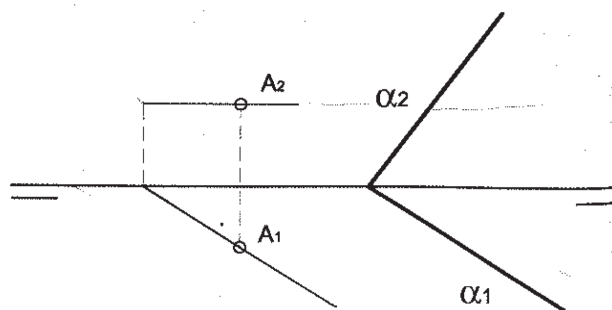
Trazar por un punto A un plano β paralelo a otro dado α.



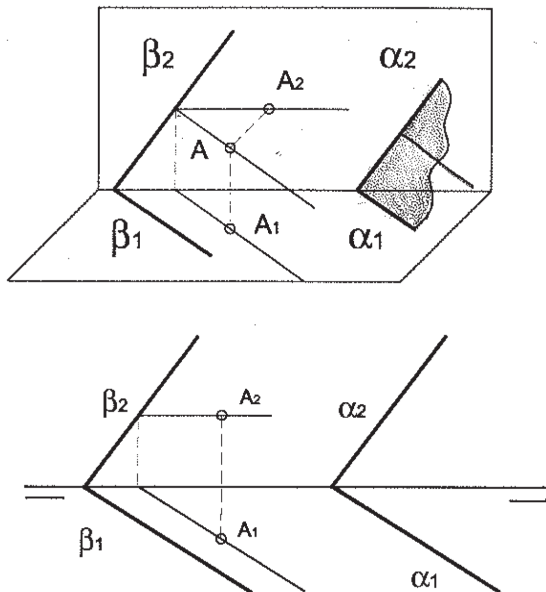


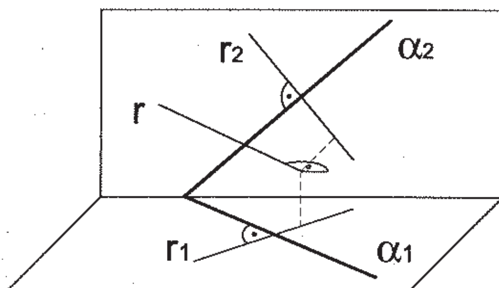
Se traza por A una recta horizontal paralela a α, es decir, paralela a una horizontal del plano α.





Por la traza de esta recta, se hacen pasar las trazas del plano pedido β, que son paralelas al α.



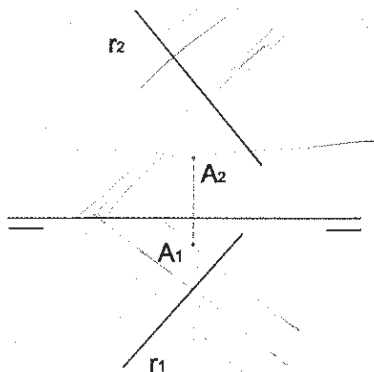


Perpendicularidad

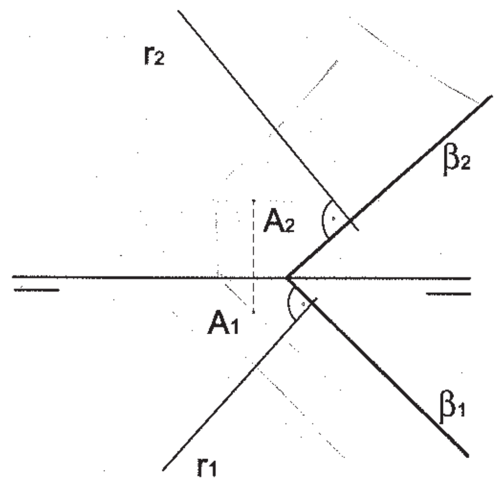
En diédrica no es tan fácil la perpendicularidad como el paralelismo. Dos rectas perpendiculares no tienen sus proyecciones perpendiculares, ni dos planos perpendiculares se pueden descubrir directamente por sus trazas. Sólo en el caso de una recta perpendicular a un plano, las proyecciones de la recta son perpendiculares a las trazas del plano.

EJERCICIO RESUELTO 8

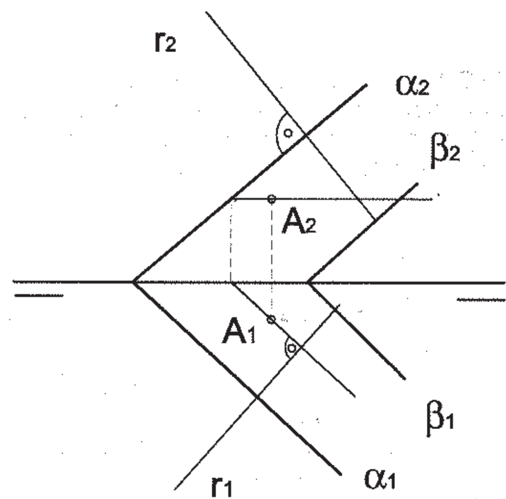
Dada una recta r y un punto A exterior a ella, trazar por A un plano α perpendicular a r.



Trazamos un plano β cualquiera que sea perpendicular a r.

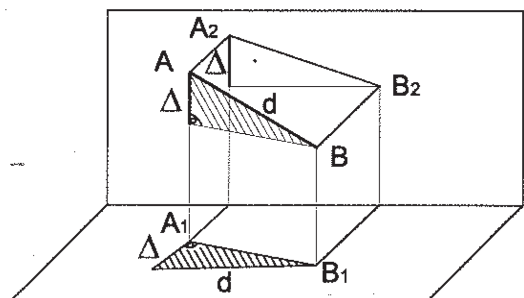


El plano pedido α será paralelo a él y pasará por A. Las rectas horizontales del plano α tienen la proyección r_1 paralela a β_1. Por tanto trazamos una horizontal del plano α que pase por A, Y por su traza vertical, dibujamos una recta perpendicular a r_2 que será α_2. La traza α_1 será paralela a β_1.

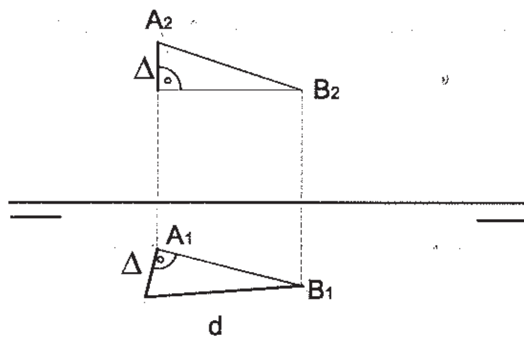


10. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

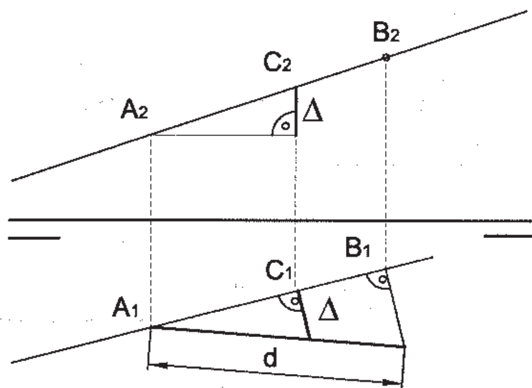
Si tenemos dos puntos A y B en el espacio y trazamos una recta horizontal por el punto más bajo, contenido en un plano proyectante, se nos forma un triángulo rectángulo.



La hipotenusa es la distancia buscada d, un cateto es la proyección horizontal A_1-B_1 del segmento y el otro cateto la diferencia de cotas Δ de ambos puntos. Ese triángulo podemos dibujarlo en el plano horizontal de proyección, a partir del segmento A_1-B_1.

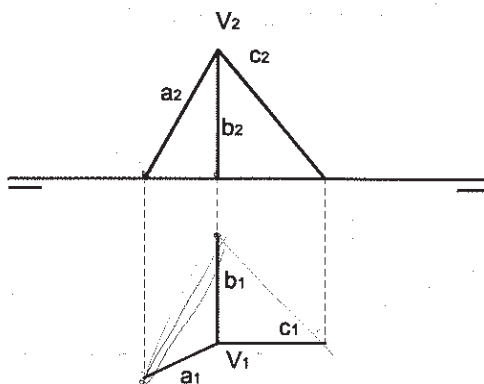


Para llevar sobre una recta r una distancia dada d a partir de un punto A, se debe hallar primero la distancia entre el punto A y uno cualquiera C de la recta. Una vez hallado el segmento en verdadera magnitud, se lleva sobre él la distancia dada a partir de A. Por el extremo se traza una perpendicular a r, que la corta en el punto pedido B_1. Por último se sube sobre r_2 y tenemos B_2.

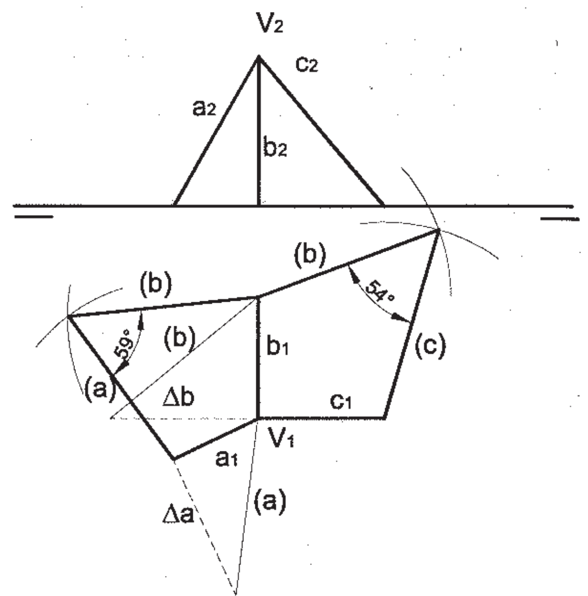


EJERCICIO RESUELTO 9

Determinar los ángulos que forma el segmento **b** con los segmentos **a** y **c**..



Una forma de hacerlo es hallando las distancias de los segmentos a, b y c (la recta c es frontal, por lo que c_2 está en verdadera magnitud), y construir en el PH las caras bc y ba en verdadera magnitud.

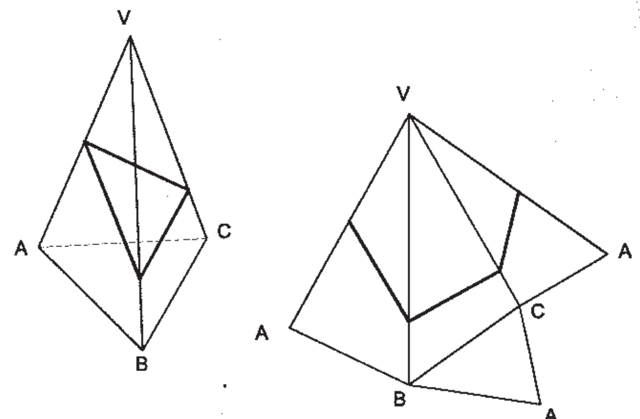


11. DESARROLLO DE UNA PIRÁMIDE

El desarrollo de un cuerpo se obtiene al extender su superficie lateral sobre un plano.

En el caso de la pirámide, el desarrollo está constituido por los triángulos que forman las caras, unidos en orden por la arista común y con el vértice coincidente. También incluye la base. Hace falta hallar la verdadera magnitud de la longitud de las aristas y construir los triángulos con esos datos.

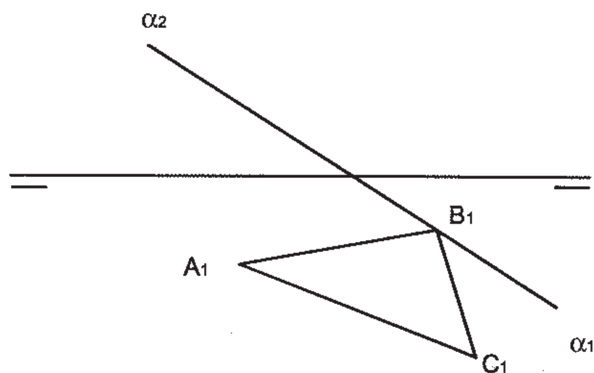
Si se considera una línea cualquiera sobre la superficie de la pirámide, la posición que ocupa en el desarrollo se llama **transformada** de la línea considerada. Un ejemplo sería el corte que un plano produce a la pirámide.



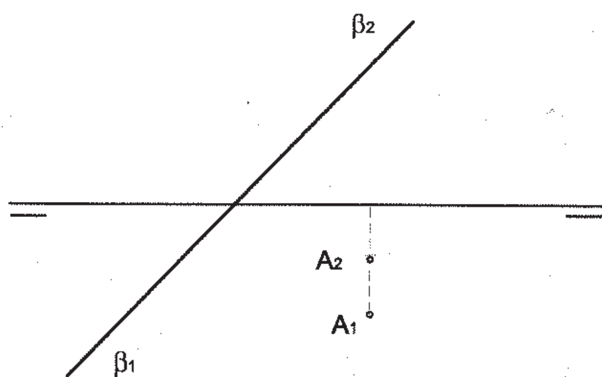
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dado un punto A (0, 3, 2) cm, trazar en diédrica:
   a) Dicho punto;
   b) Un plano oblicuo que contenga a dicho punto;
   c) Una línea de máxima pendiente y otra de máxima inclinación de este plano, que pasen las dos por el punto A.

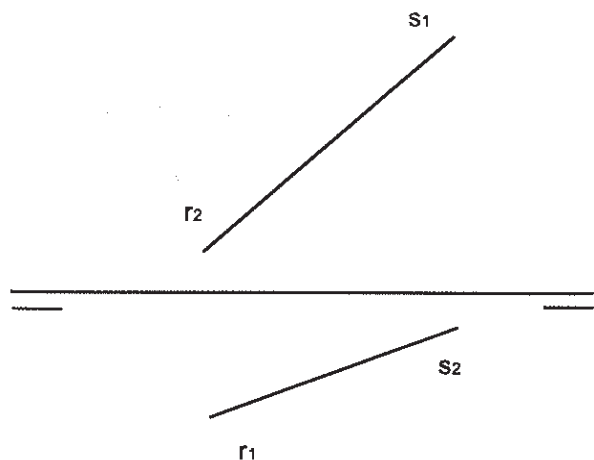
2. Hallar la proyección vertical del triángulo ABC, contenido en el plano α.



3. Trazar por el punto A un plano paralelo al plano β.

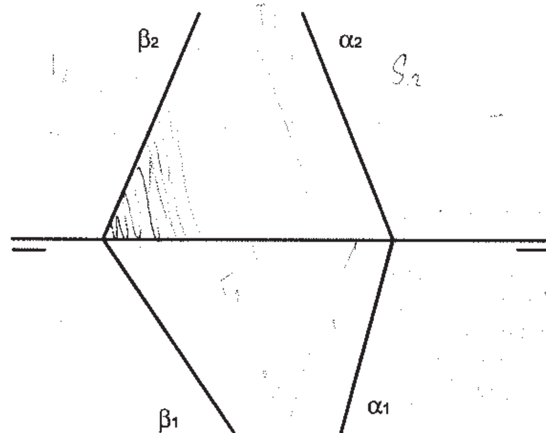


4. Dibujar las trazas del plano determinado por las dos rectas r y s.

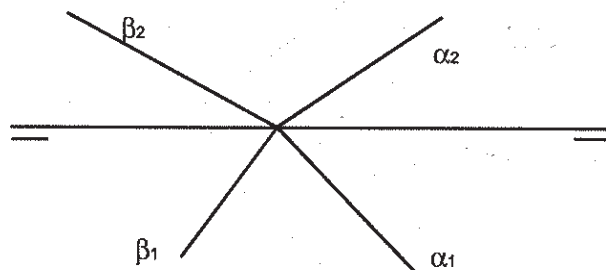


5. Hallar la intersección de los planos que pasan por ABC y DEF: A(2,2,2); B(-2,8,1); C(-1,1,4); D(3,1,2); E(6,3'5,1); F(7,1,4) cm.

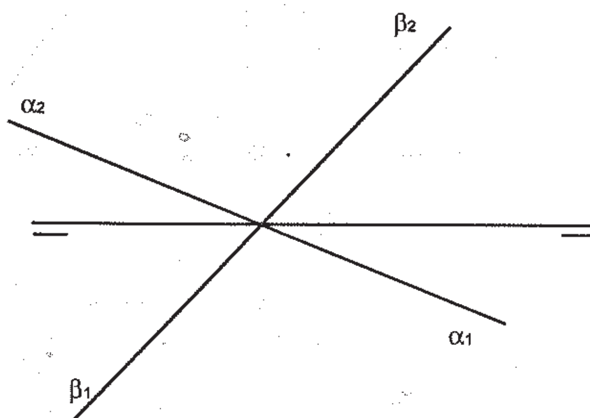
6. Hallar las proyecciones de la recta intersección de los planos α y β, cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.



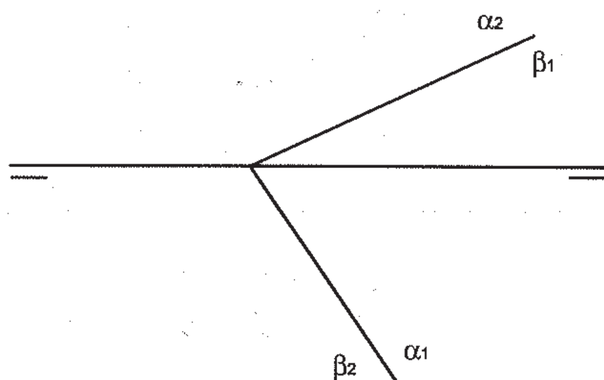
7. Determinar la recta intersección de los planos.



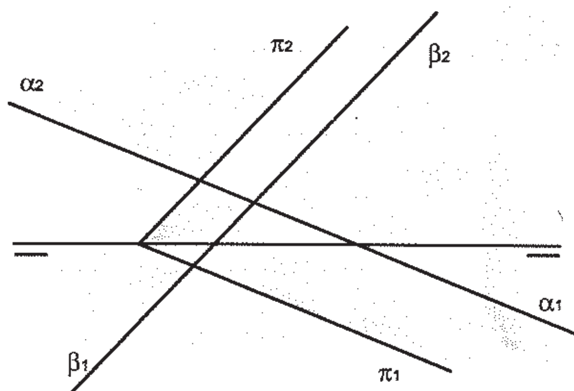
8. Hallar la recta intersección de los planos α y β .



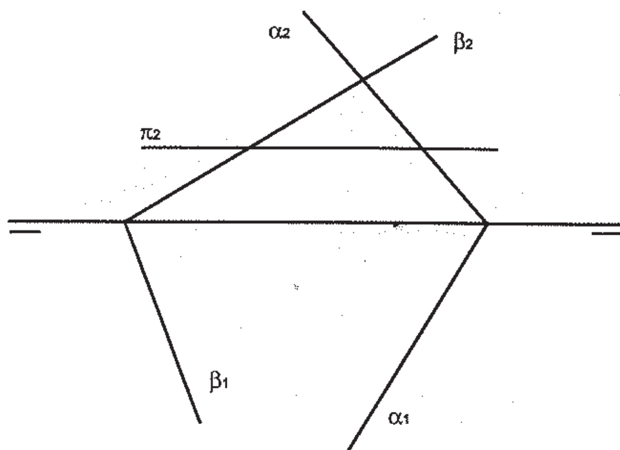
9. Hallar la recta intersección de los planos α y β.



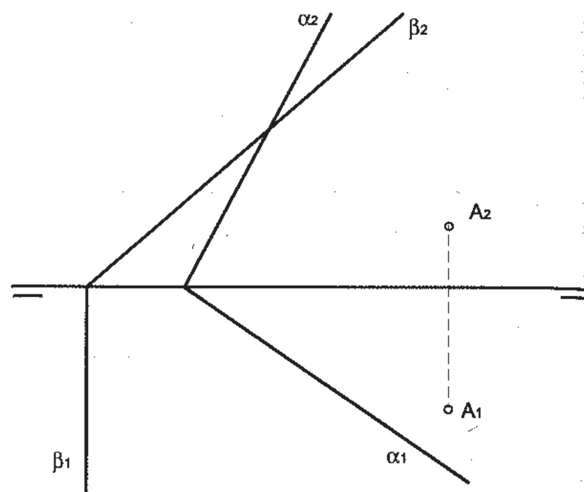
10. Hallar el punto común A de intersección de los tres planos dados.



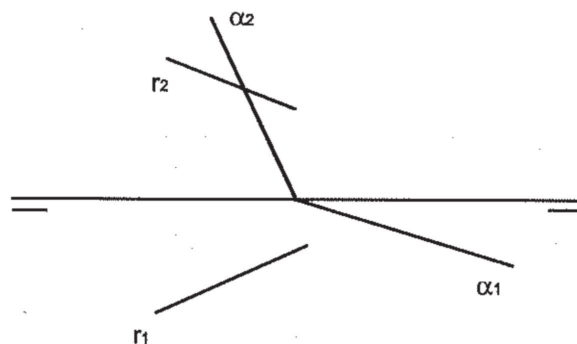
11. Hallar el punto de intersección P de los planos α, β y π.



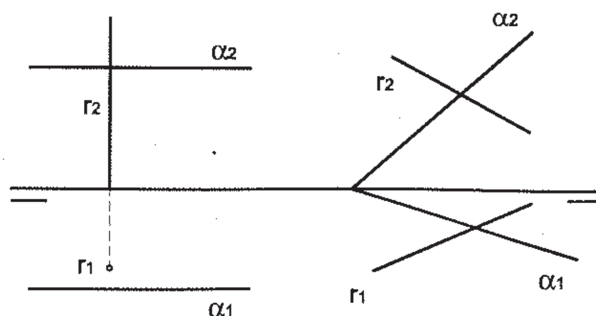
12. Trazar por el punto A, una recta que sea paralela al plano α y al plano β.



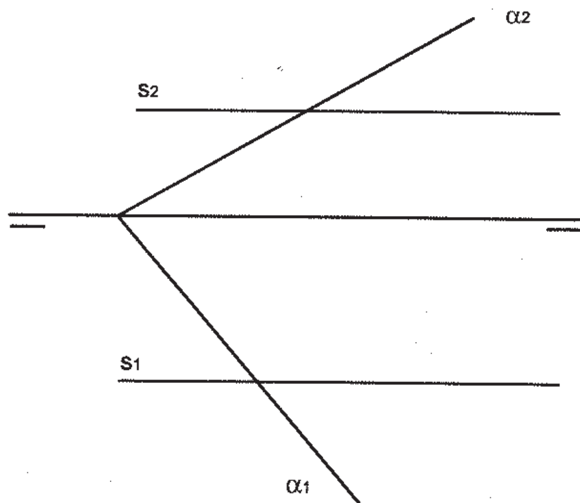
13. Hallar el punto de intersección de la recta r con el plano.



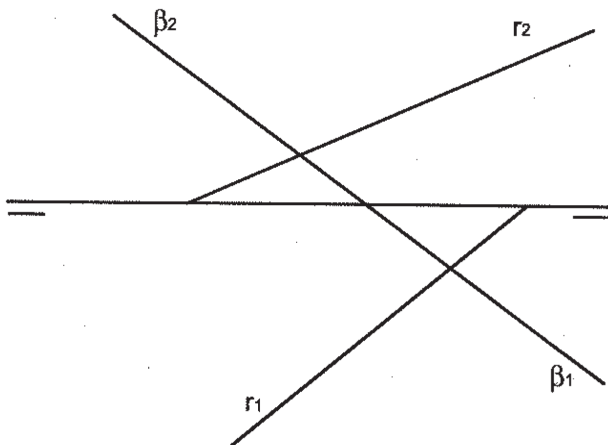
14. Hallar la intersección de la recta r con el plano α en los dos casos siguientes:



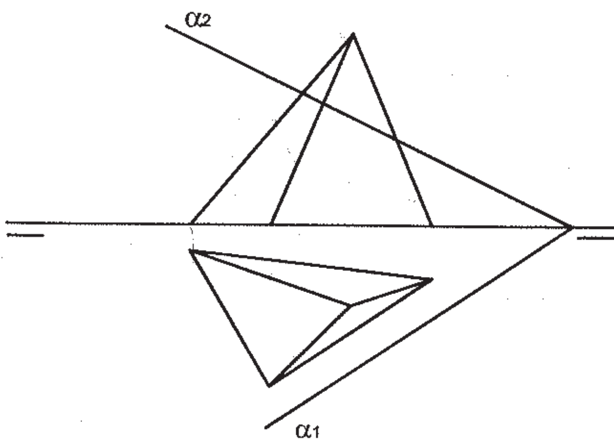
15. Hallar el punto de intersección de la recta s con el plano α.



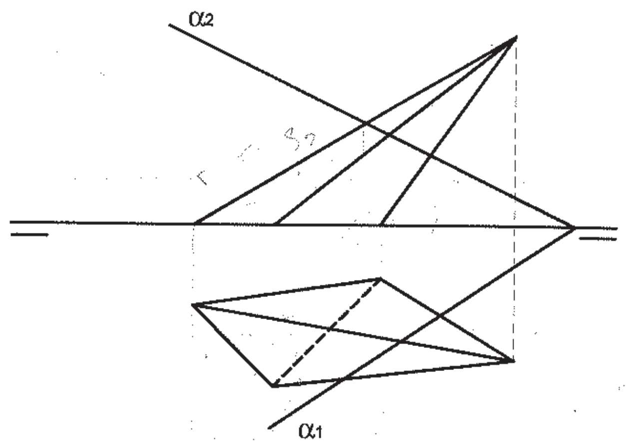
16. Hallar el punto de intersección de la recta r con el plano β.



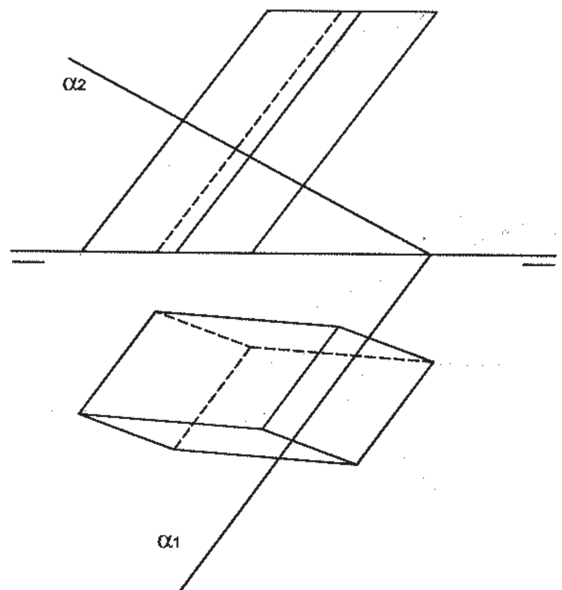
17. Dibujar la sección de la pirámide por el plano indicado.



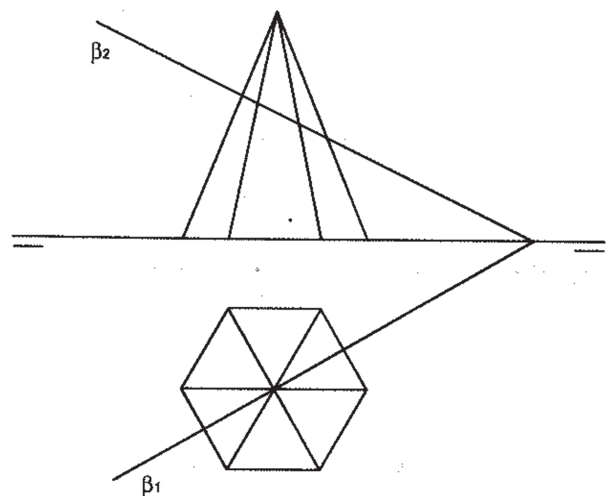
18. Dibujar la sección de la pirámide por el plano indicado.



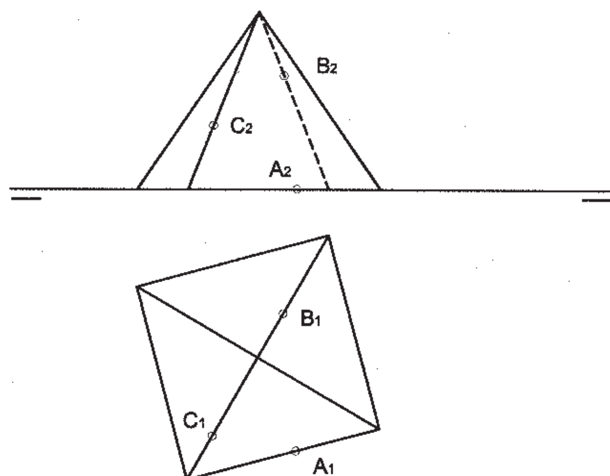
19. Dibujar la sección del prisma por el plano indicado



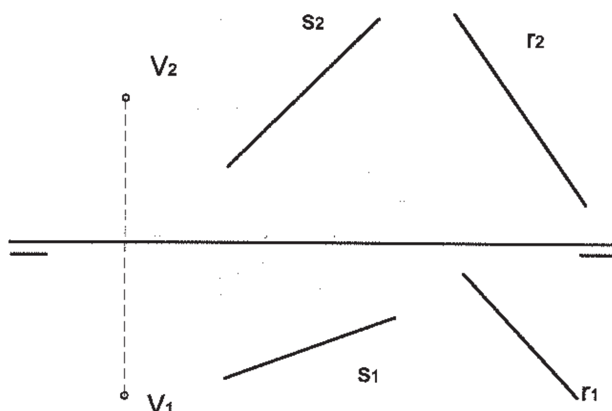
20. Hallar la sección producido por el plano β en el cuerpo mostrado en la figura siguiente.



21. Trazar las proyecciones de la sección producida en la pirámide por el plano que pasa por los puntos A, B y C.



22. Determinar las trazas del plano paralelo a las rectas dadas y que pasa por el punto dado.

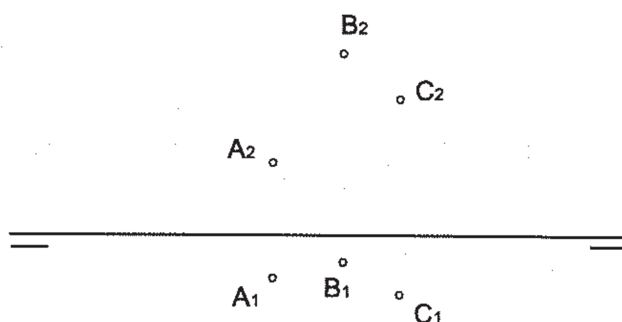


23. Dados tres puntos A, B, C por sus proyecciones, se pide:

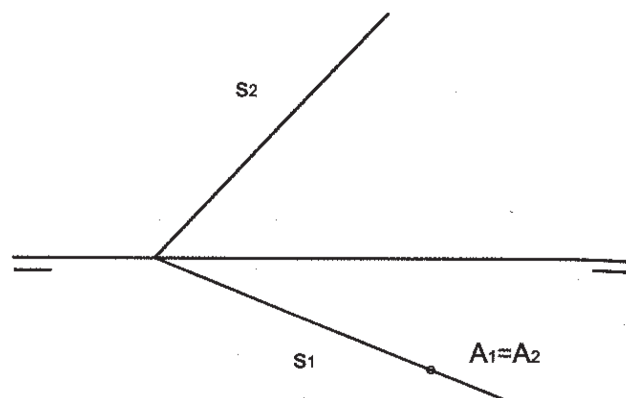
a) Trazar el plano determinado por ellos.

b) Trazar el plano perpendicular al hallado y que pase por A y B.

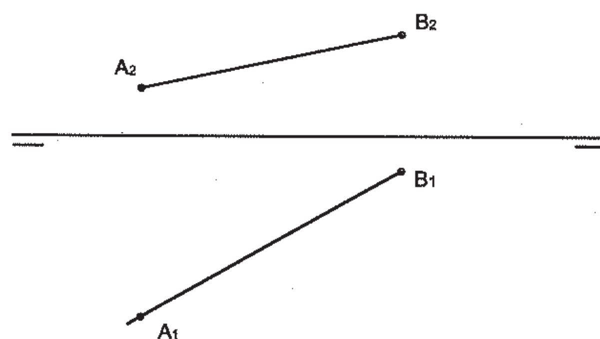
c) Determinar la intersección de dichos planos.



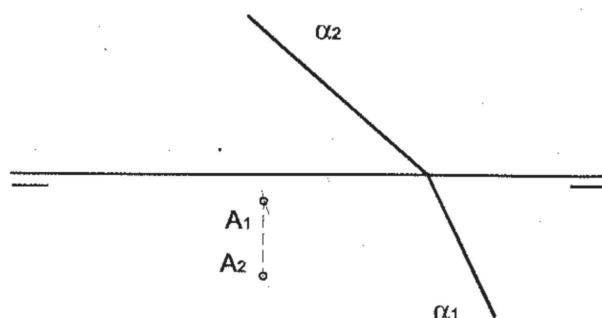
24. Hallar las trazas de un plano perpendicular a la recta s y que pase por el punto A.



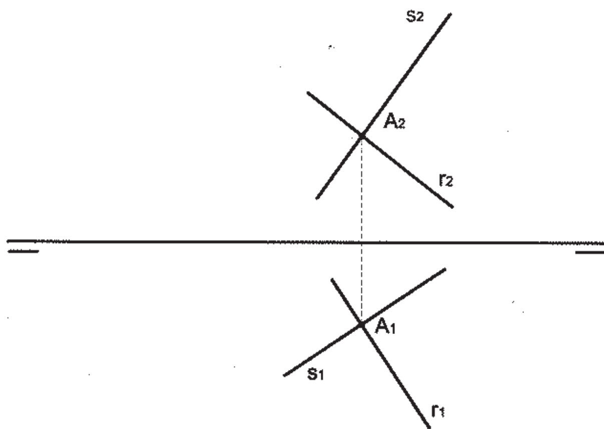
25. Determinar el plano perpendicular al segmento AB y que equidiste de ambos puntos.



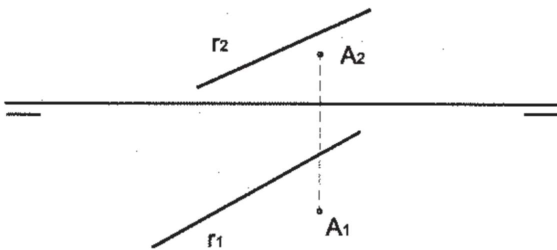
26. Trazar por el punto A la recta perpendicular al plano dado, determinando su punto de intersección.



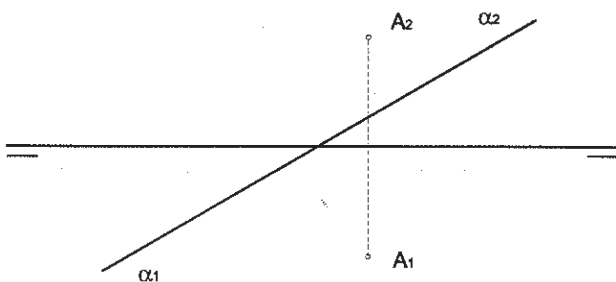
27. Dibujar las proyecciones y trazas de la recta t perpendicular al plano definido por las rectas r y s, en su punto de intersección.



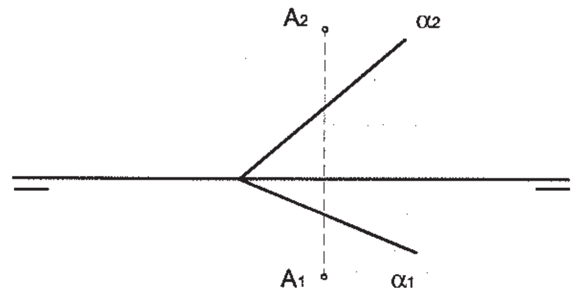
28. La recta r es de máxima pendiente de un plano α. Se pide hallar el pie de la perpendicular trazada desde el punto A sobre dicho plano.



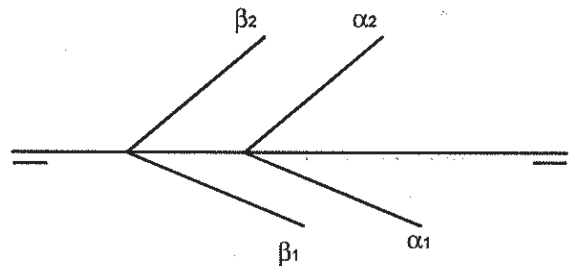
29. Trazar por el punto A una recta paralela a la de máxima pendiente del plano α.



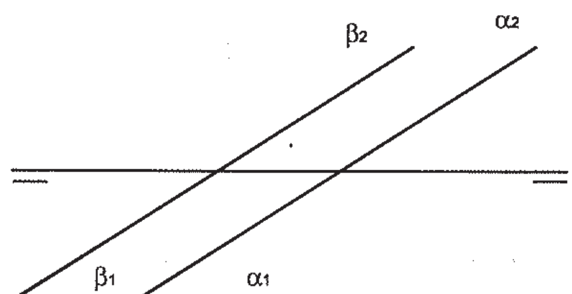
30. Obtener en diédrica la distancia del punto A al plano dado y calcular su verdadera magnitud.



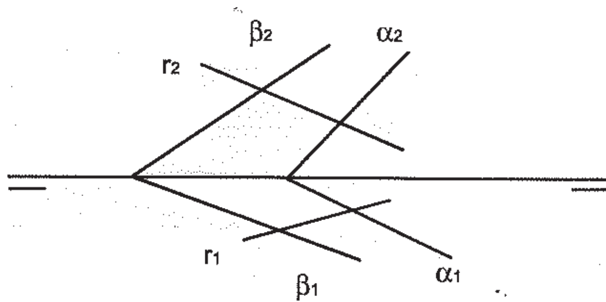
31. Hallar la distancia entre los planos paralelos dados.



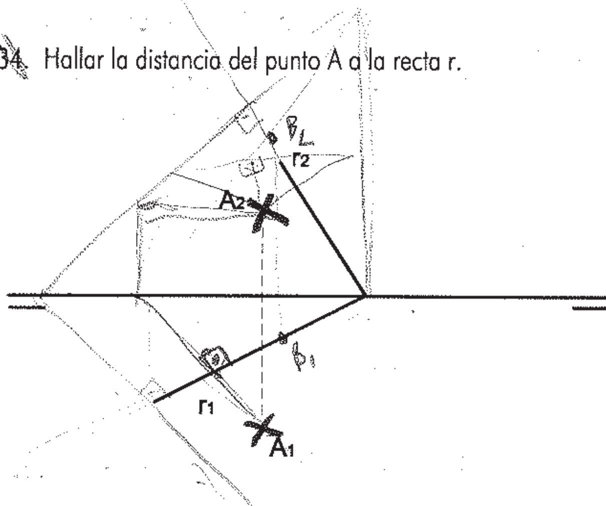
32. Hallar la distancia que separa a los dos planos paralelos α y β.



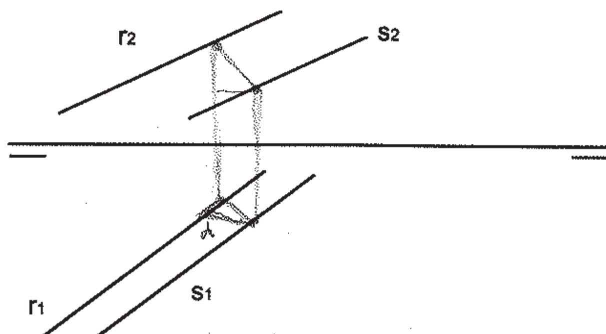
33. Hallar la longitud del segmento de recta comprendido entre los dos planos dados.



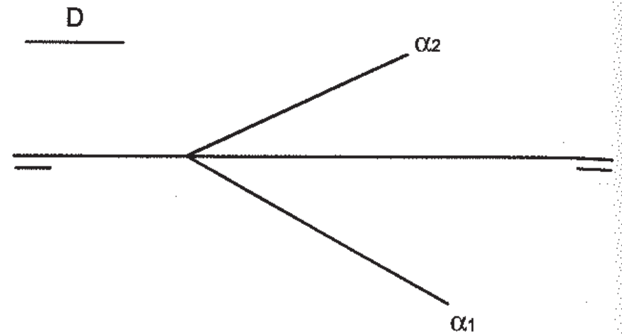
34. Hallar la distancia del punto A a la recta r.



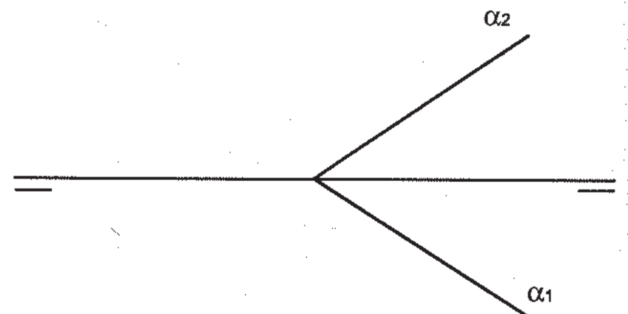
35. Determinar la distancia entre las rectas paralelas dadas.



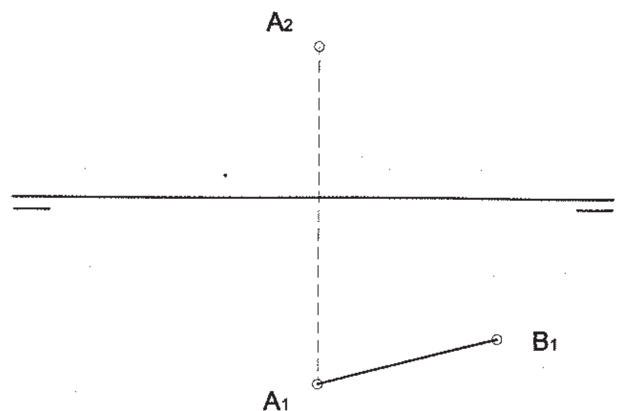
36. Dado el plano α, trazar otro paralelo a una distancia D dada.



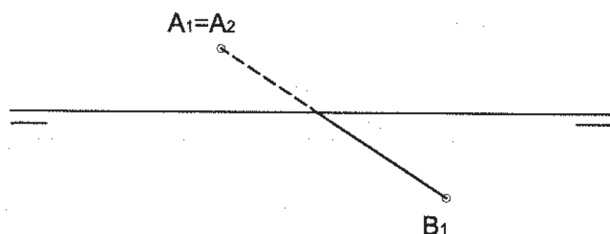
37. Trazar los planos paralelos al plano dado y que distan de él 40 mm.



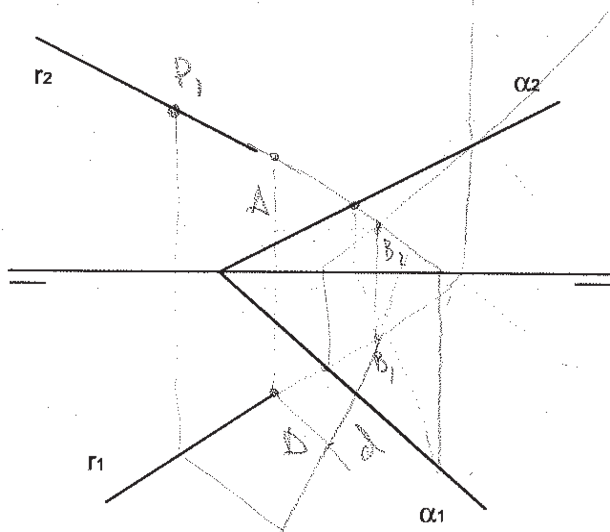
38. El segmento AB se proyecta horizontalmente en A_1-B_1. Hallar sus posibles proyecciones verticales sabiendo que su verdadera magnitud es de 45 mm.



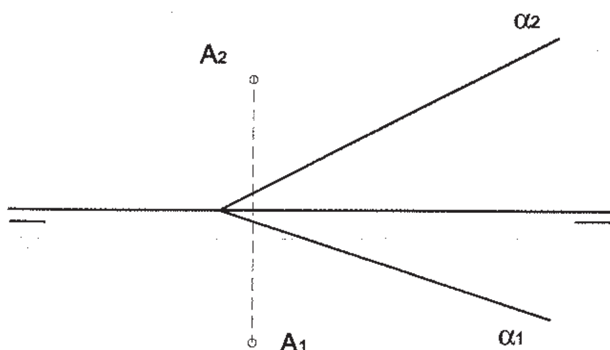
39. Dibujar la proyección vertical del segmento AB, sabiendo que su verdadera magnitud es de 4 cm. y que el extremo B está mas alto que el punto A.



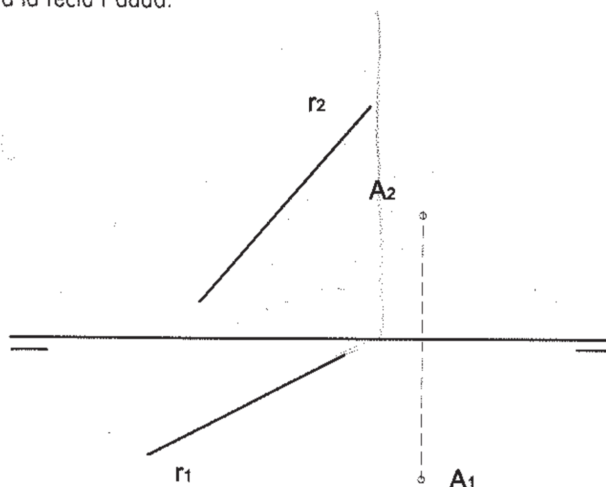
40. Determinar las proyecciones de los posibles puntos P de la recta r que disten 25 mm. del punto de intersección de r con el plano α.



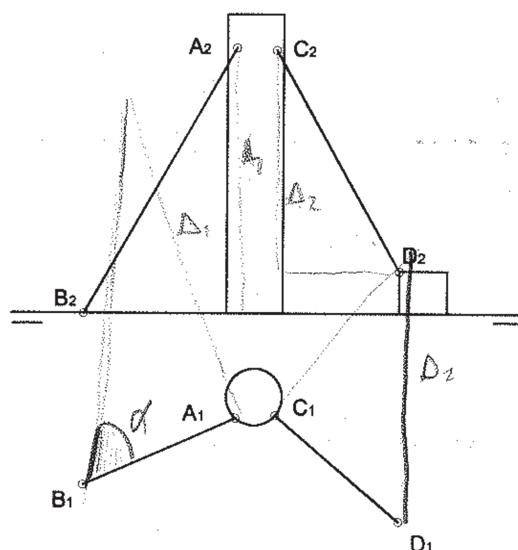
41. Hallar el punto del plano α más cercano al punto A.



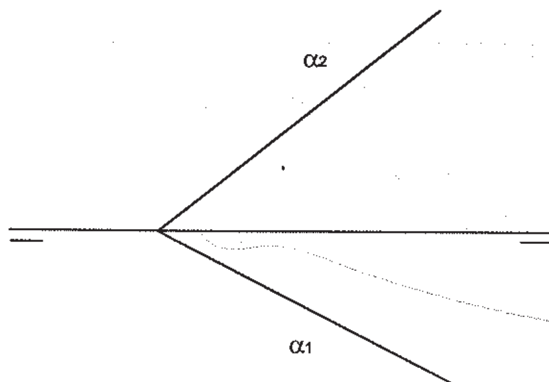
42. Hallar la distancia entre el punto A y el plano perpendicular al plano horizontal de proyección que contenga a la recta r dada.



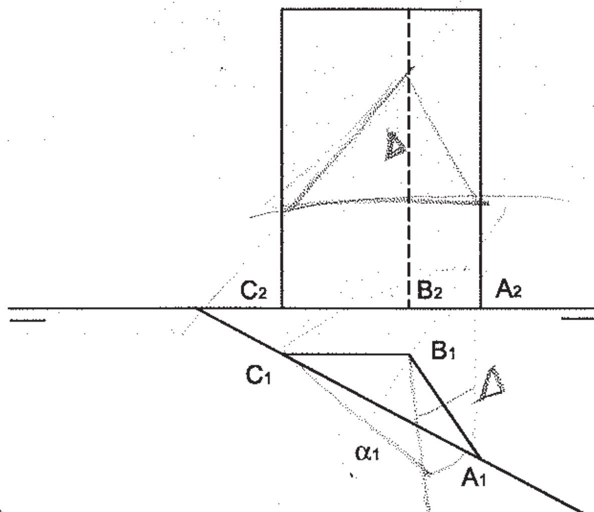
43. El asta de una bandera está fijado mediante tres cables de los que se han representado el AB y el CD. Determinar gráficamente la verdadera magnitud de la longitud del cable CD y el ángulo que forma AB con el plano horizontal.



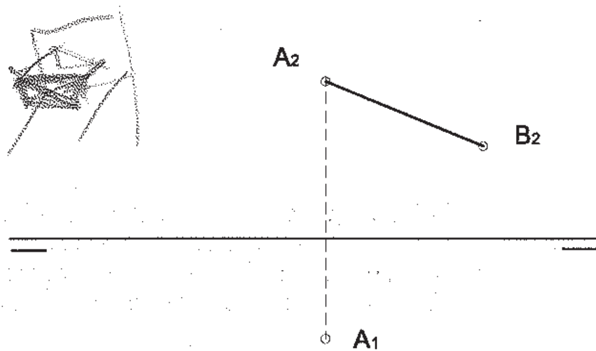
44. Hallar uno de los puntos de la línea de tierra que dista 25 mm. del plano α.



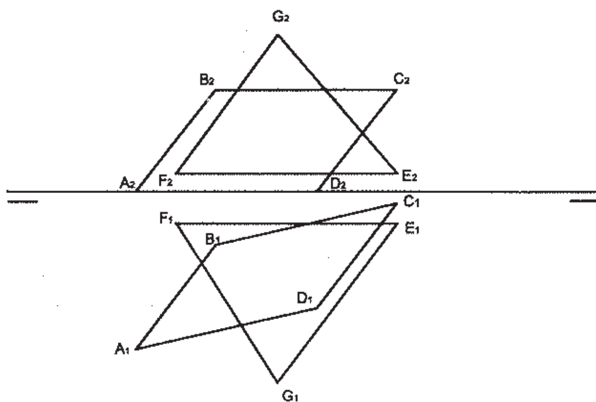
45. Determinar la traza vertical del plano α para que la sección producida en el prisma recto de base el triángulo isósceles ABC sea, en verdadera magnitud, un triángulo equilátero.



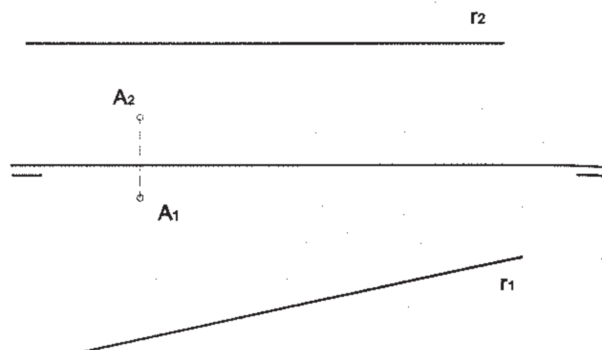
46. Dibujar la proyección horizontal del segmento AB conociendo su proyección vertical A_2-B_2 y sabiendo que su verdadera longitud es de 40 mm. Trazar todas las soluciones posibles.



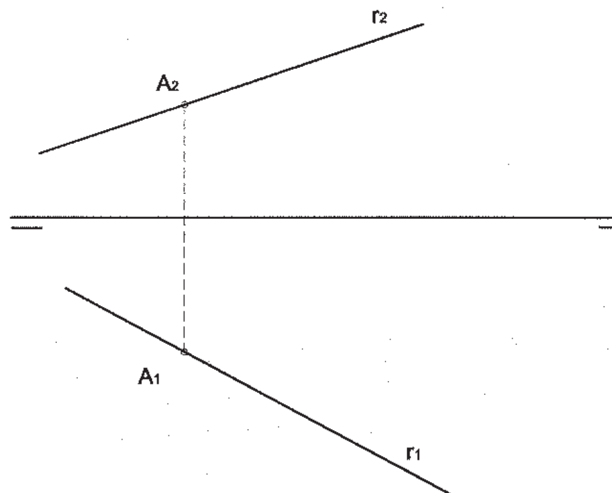
47. Hallar la intersección del cuadrilátero ABCD con el triángulo EFG.



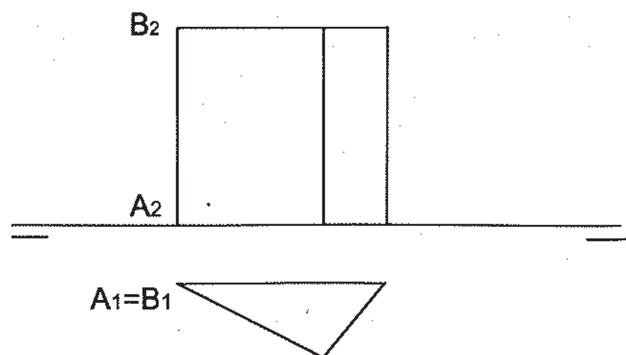
48. Una línea eléctrica está representado por la recta r. Determinar la verdadera magnitud de la distancia a dicha línea desde el punto A.



49. Hallar las proyecciones de una recta horizontal que sea perpendicular a la recta r en el punto A.



50. Dibujar el camino más corto desde el vértice A al B, pasando por todas las caras laterales del prisma.



TEMA 12

SISTEMA DIÉDRICO II



1. ABATIMIENTOS DE PLANOS

Abatir un plano es girarlo alrededor de un eje (se suele tomar la traza horizontal) hasta hacerlo coincidir con un plano coordenada, normalmente el PH.

En diédrica, las medidas y magnitudes en un plano cualquiera no están en verdadera magnitud, por lo que no se pueden hallar directamente longitudes de segmentos, áreas, etc. Sin embargo al abatirlo, como lo hacemos coincidir con el PH, sí está el plano -y todo lo contenido en él- en verdadera magnitud.

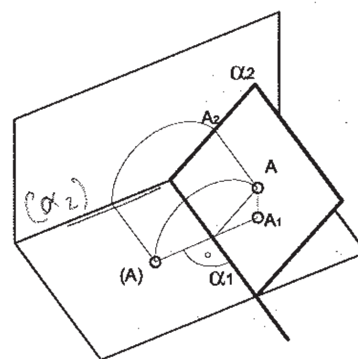
El eje de giro se llama **charnela** y se representa haciendo en un extremo dos trazos cortos, uno a cada lado de la recta. Los elementos abatidos se ponen entre paréntesis.

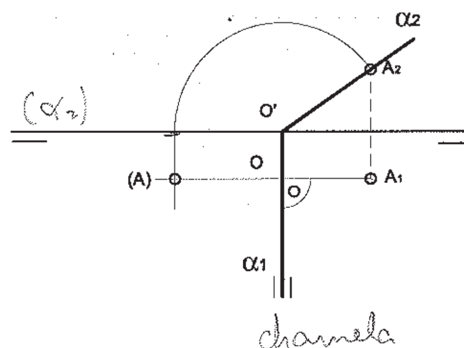
Para ver cómo se hace, estudiemos primero un caso sencillo:

Abatimiento de un plano perpendicular al PV

Giramos el plano alrededor de α_1, hasta hacerlo coincidir con el PH. La traza α_2 se sitúa sobre la LT.

Un punto cualquiera A describe un arco cuyo centro está en la charnela, y que está en un plano perpendicular al eje de giro. Por esa razón el punto abatido (A) estará en la perpendicular trazada desde A_1 a la charnela, y a una distancia de ella OA = O'A_2.

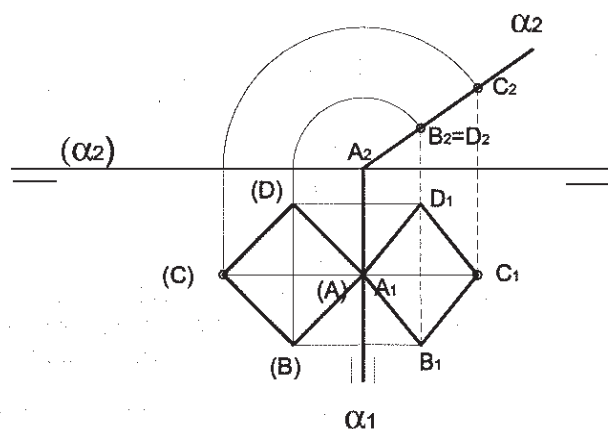




EJERCICIO RESUELTO 1

En un plano α perpendicular al PV y que forma un ángulo de 30° con el PH, hay un cuadrado de lado 3 cm, cuya diagonal es perpendicular a α_1 y con un vértice en dicha traza, a 4 cm de la LT. Hallar las proyecciones de dicho cuadrado.

Se abate el plano α, se construye en él el cuadrado y posteriormente se desabate.

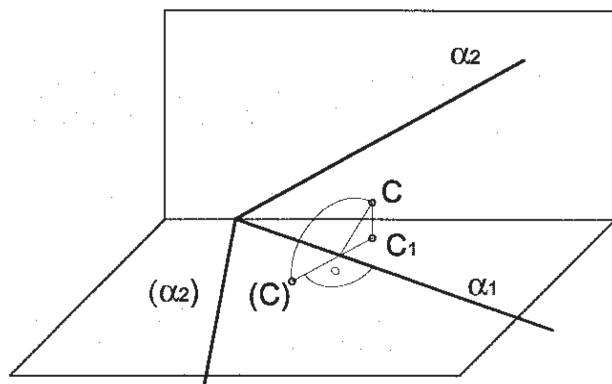


Abatimiento de un plano cualquiera

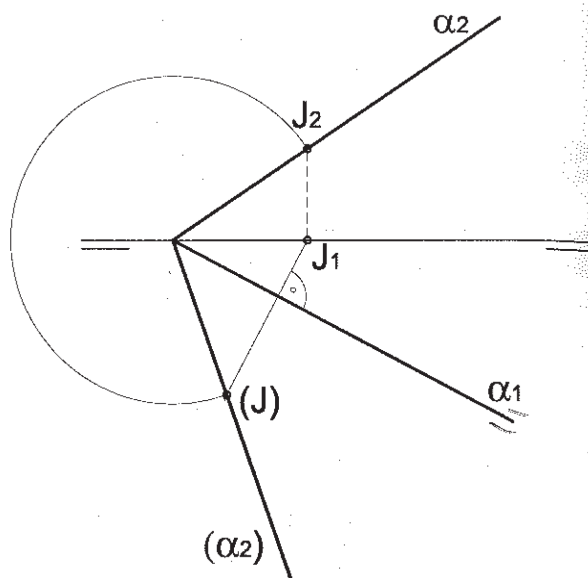
Supongamos abatido el plano α. Se observa que:

1°. Al abatir un punto cualquiera C, describe una circunferencia cuyo centro está en la charnela. Esa circunferencia está en un plano perpendicular al eje de giro. Por esa razón el punto abatido (C) estará en la perpendicular trazada desde C_1 a la charnela.

2°. La traza α_2 está en verdadera magnitud antes y después de abatir.

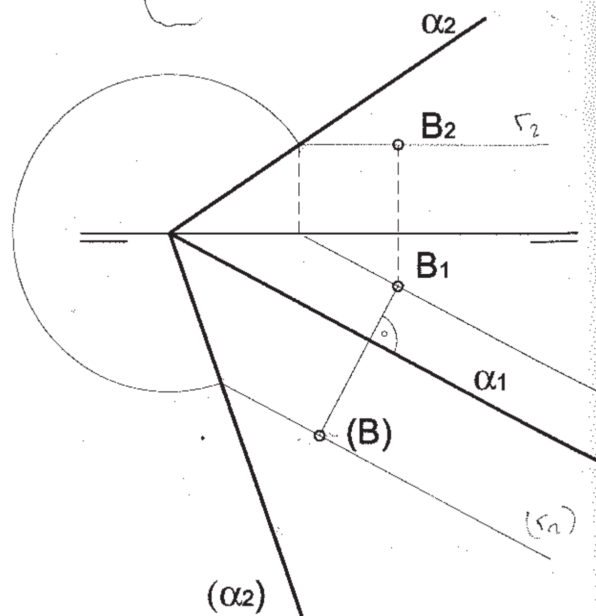


Para abatir un plano cualquiera α, se debe abatir primero su traza vertical α_2. Para ello cogemos un punto cualquiera J de dicha traza. Su abatido (J) estará en la perpendicular a α_1 desde J_1, y, como en α_2 está a una distancia de O igual a OJ_2, estará en la circunferencia de centro O y radio OJ_2.

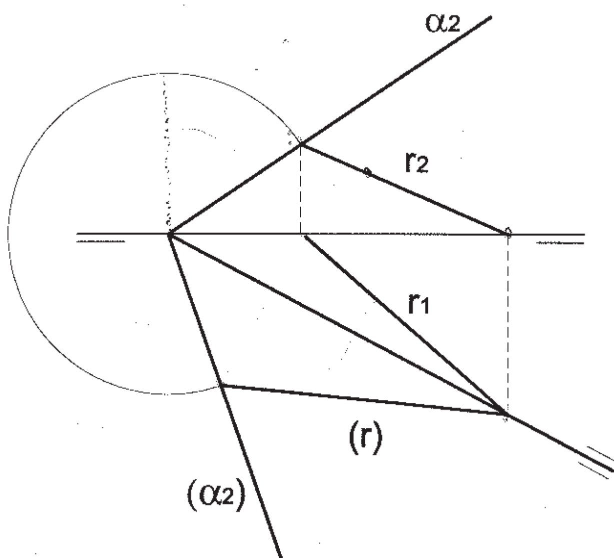


Para abatir ahora un punto cualquiera B del plano α se tiene en cuenta:

1. (B) abatido estará en la perpendicular desde B_1 a α_1
2. Se traza una horizontal del plano (paralela a α_1) por B. Al abatir esta recta, sigue siendo paralela a la charnela, por lo que para abatirla se lleva su traza sobre (α_2) y se dibuja una paralela a la charnela. (B) será la intersección de estas dos rectas.



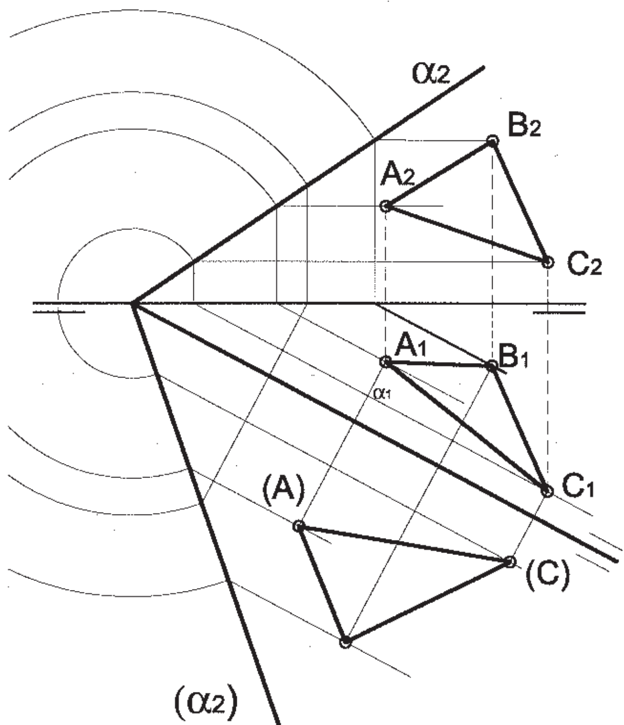
Para abatir una recta del plano α basta abatir dos puntos de ella: uno puede ser su traza horizontal, que está en la charnela y por tanto coincide con su abatido, y el otro puede ser la traza vertical, que está en α_2.



EJERCICIO RESUELTO 2

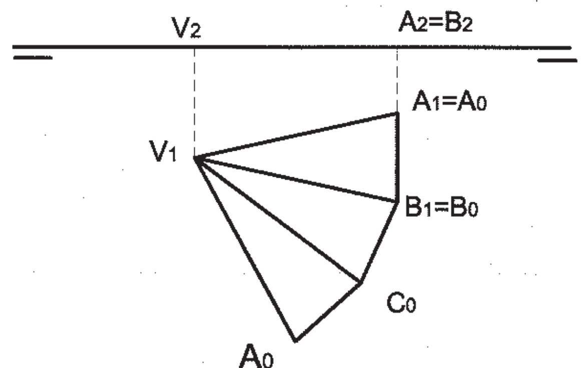
Hallar la verdadera magnitud del triángulo que forman tres puntos dados A, B y C.

Se halla el plano definido por los tres puntos, se abate y en él se obtiene el triángulo en verdadera magnitud.

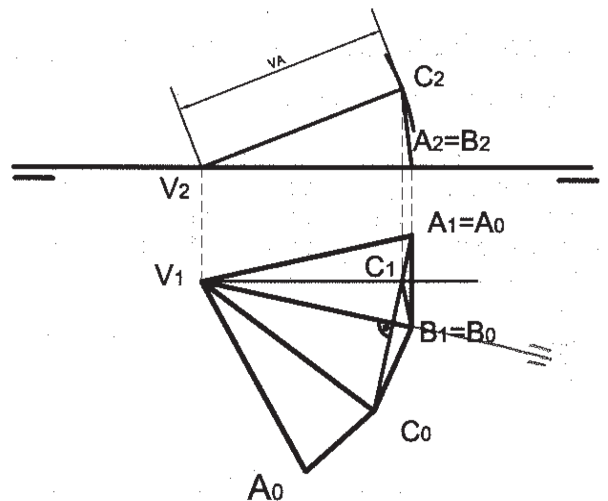


EJERCICIO RESUELTO 3

Construir las proyecciones de la pirámide VABC de la que se conoce el desarrollo $V_1A_0B_0C_0$ y cuya cara lateral VAB está situada en el plano horizontal.



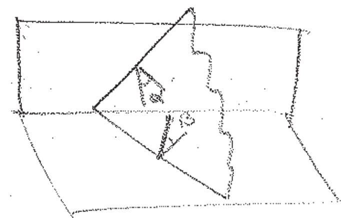
Por la posición que tiene la pirámide, la arista AC será frontal. Por tanto su proyección vertical estará en verdadera magnitud y su proyección horizontal estará en una recta horizontal que pasa por V_1.
Por otra parte, como la cara VBC está abatida, la proyección C_1 estará en la perpendicular a V_1B_1.

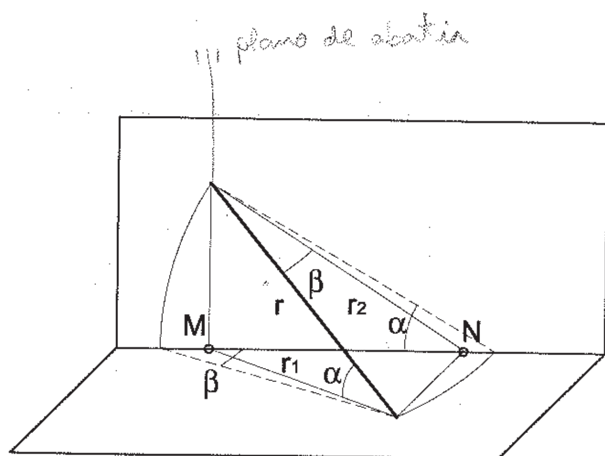


2. ÁNGULOS

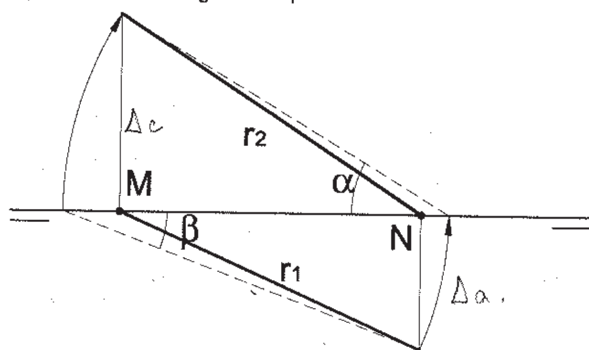
Ángulos de una recta con los planos de referencia

Para hallar los ángulos que una recta forma con los planos de referencia PH y PV se abaten los triángulos que forma r con r_1 y con r_2 en los dos planos proyectantes.

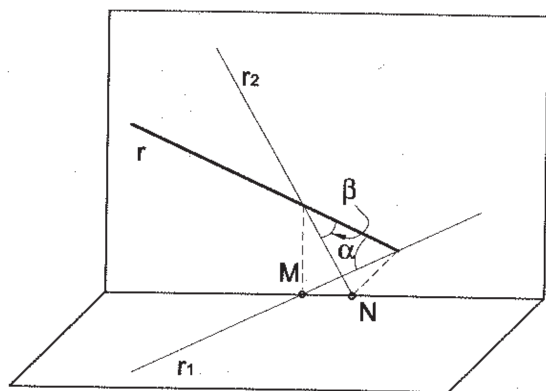


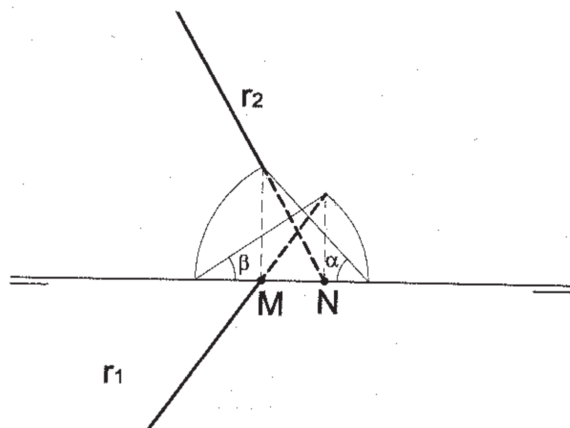


Como se observa en el dibujo, los centros M y N de los arcos siempre están en la LT, el radio está delimitado por las trazas correspondientes, y al llevar una traza a la LT, se une con la otra para formar el ángulo α ó β.



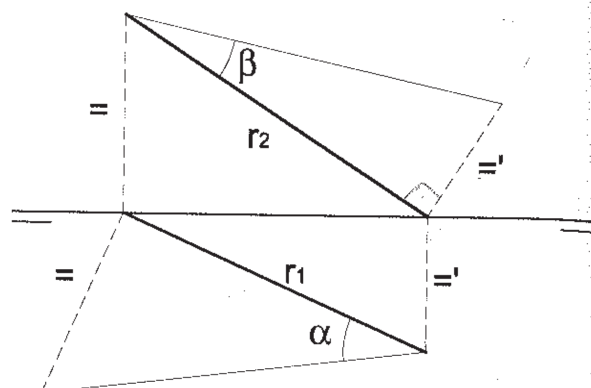
Si la recta pasa por otros cuadrantes, los ángulos con los planos coordenados se hallan de la misma forma, aunque los triángulos que se abaten estarán en otros cuadrantes.

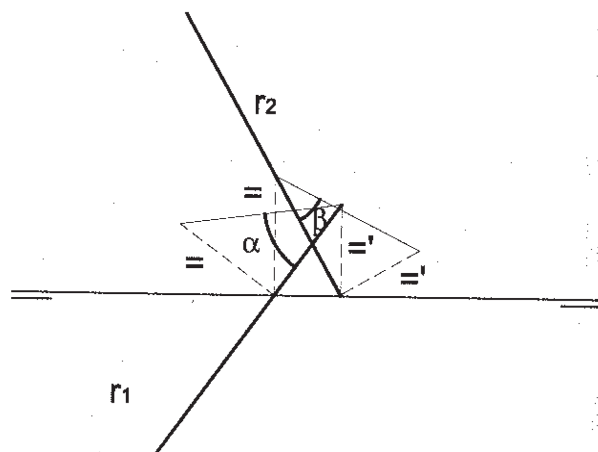




TRIÁNGULO de distancias

En ambos casos, también se podrían abatir alrededor de r_1 y de r_2 el segmento que une las trazas, de forma similar a la construcción que se hace para hallar la distancia entre los dos puntos trazas. En esos triángulos abatidos están los ángulos buscados: (mejor fuera de dibujos)

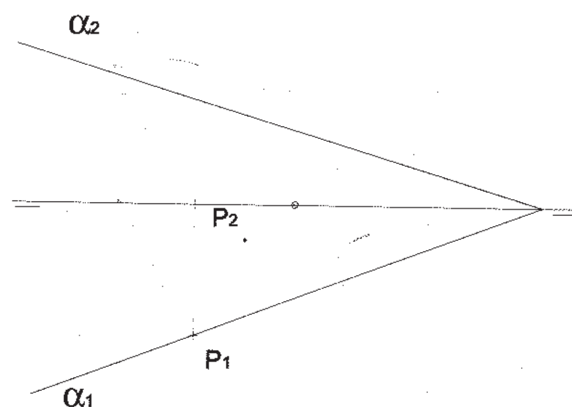




EJERCICIO RESUELTO 4

Hallar las proyecciones y trazas de todas las rectas contenidas enel plano α que pasen por el punto P y que formen 45° con el plano vertical de proyección.

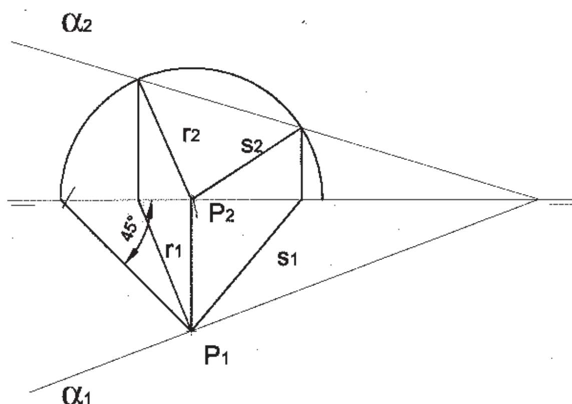
↳ Δ alejamiento



Ángulo con PV → β → r máx inclinación → Δ alejamiento

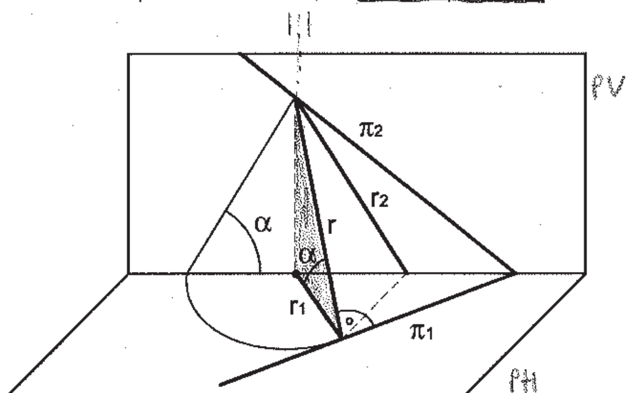
Ángulo con PH → α → r máx pendiente → Δ cota.

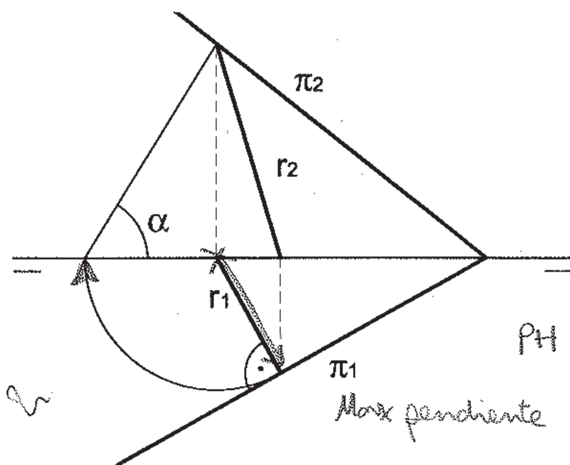
Las rectas solución, al abatirlas sobre el PH, formarán 45° con la LT. Por tanto desde P_1 se trazan dos rectas que formen 45° con la LT. Al desabatir estas rectas recorren un cono de centro P_2. Donde corte con α_2 serán las trazas de la rectas solución.



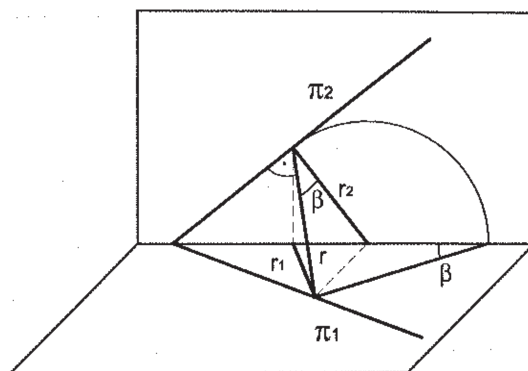
Ángulos de un plano con los planos de referencia

El ángulo α que un plano π forma con el PH es el mismo que el que forma cualquiera de sus rectas de máxima pendiente.

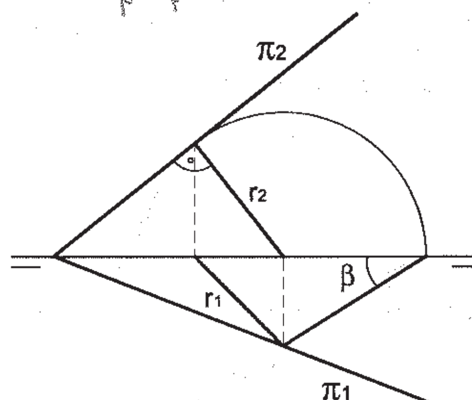




El ángulo β que un plano π forma con el PV es el mismo que el que forma cualquiera de sus rectas de máximo inclinación.

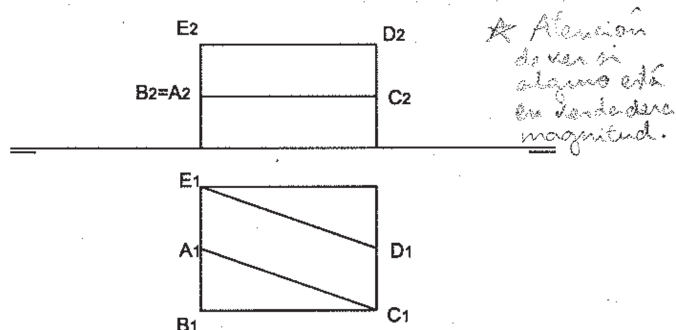


se abate la perpendicular

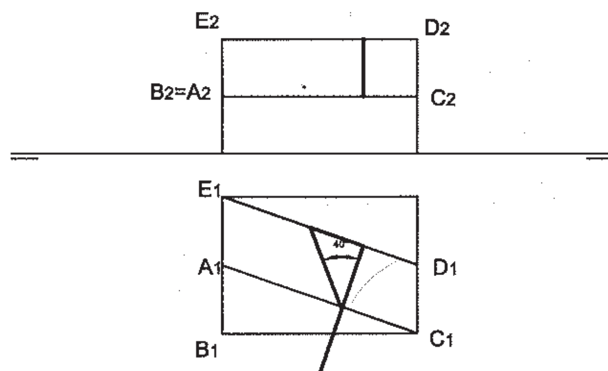


EJERCICIO RESUELTO 5

Determinar el ángulo que forman los planos ABC y ACDE.



El plano ABC es horizontal. Si cortamos el plano ACDE por un plano perpendicular a AC, y abatimos, podemos dibujar el ángulo pedido:



* cambiar trazas: α2 α1

Ángulo de dos rectas que se cortan

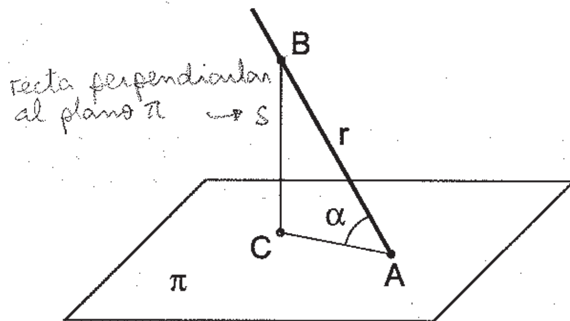
Para hallar el ángulo que forman dos rectas que se cortan en el espacio, se abate el plano que forman, y en él estará el ángulo pedido en verdadera magnitud.

Ángulo de dos rectas que se cruzan

Si por un punto cualquiera de una de las rectas se traza una paralela a la otra, el ángulo formado es igual al pedido, y hemos transformado el problema al caso anterior.

Ángulo que forma una recta r y un plano π

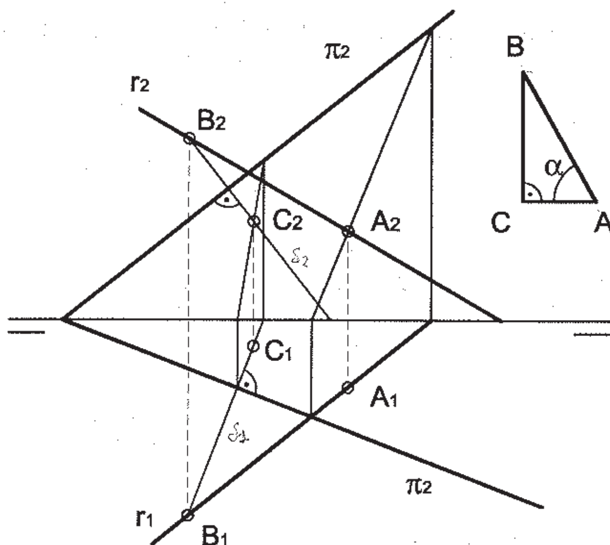
Para determinar el ángulo α que forma una recta r y un plano π se hace lo siguiente:



1°. Se obtiene el punto A de intersección de r con π.

2°. Se coge un punto B de r, se traza una perpendicular al plano π y se obtiene el punto intersección C.

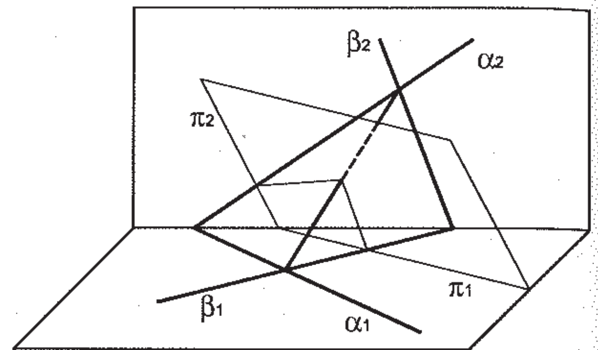
3°. Se hallan las distancias CB y CA (en el dibujo se ha omitido por claridad), y se construye el triángulo rectángulo ABC, en el que está el ángulo α pedido.



★ es complejo (el dibujo). Saberse bien los pasos

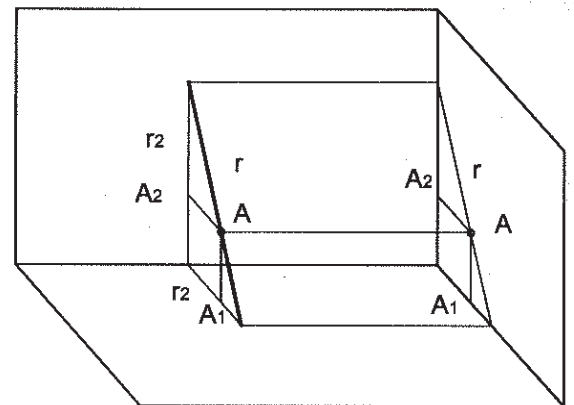
Ángulo de dos planos que se cortan

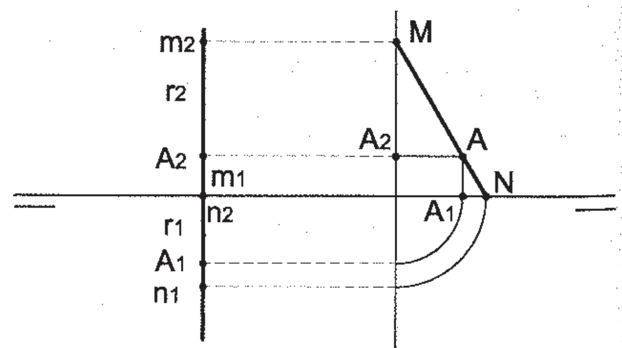
Se traza un plano π perpendicular a la recta intersección de α y β. Se obtiene el corte entre este plano y los dos dados. El ángulo que forman esas dos rectas es la solución. Para hallar el valor de ese ángulo tendremos que abatir el plano π.



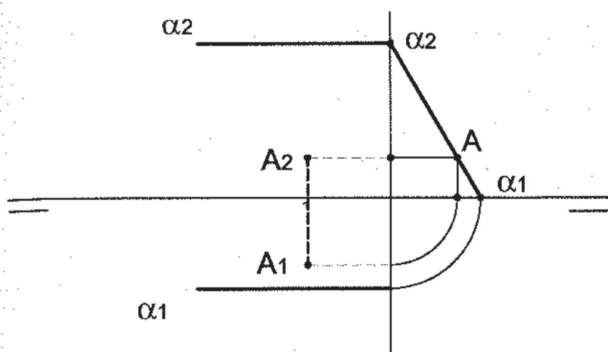
3. VISTA LATERAL

A veces puede ser interesante trabajar con una tercera proyección. Para obtenerla se utiliza un plano vertical perpendicular a los otros dos de referencia, sobre el que se proyecta el objeto. Por ejemplo es muy útil para trabajar con rectas de perfil -hallar puntos sobre ella, hallar sus trazas, etc-.

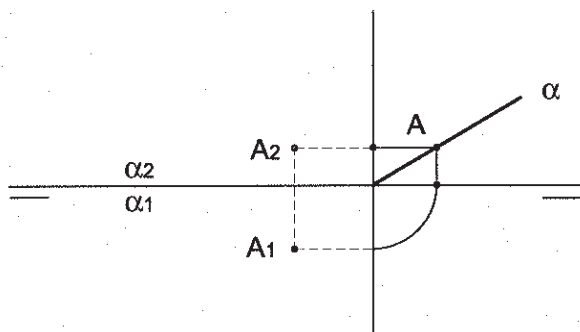




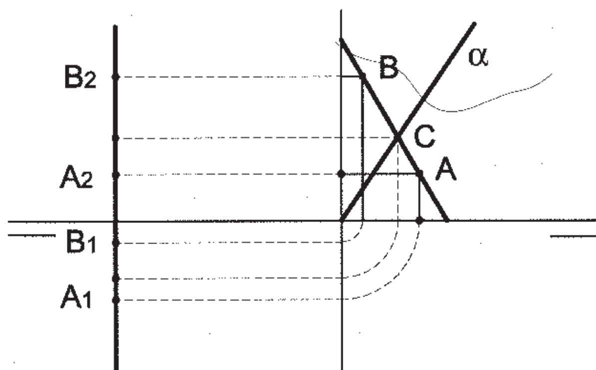
También es muy útil usar la vista lateral al trabajar con planos paralelos a la LT.



Por último, es imprescindible esta vista si usamos planos que contienen a la LT.

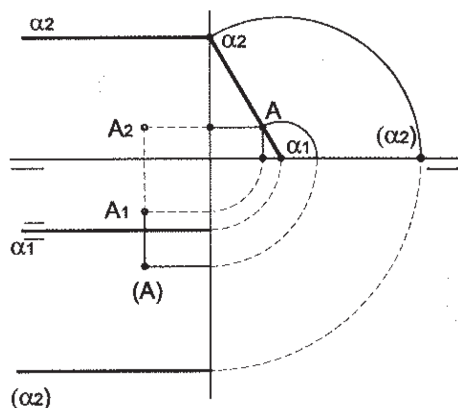


EJERCICO RESUELTO 6
Hallar la intersección de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano que contiene a la LT y forma 53° con el PH.



Abatimiento en vista lateral

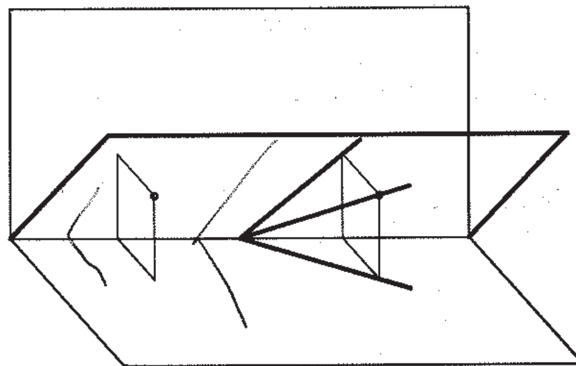
Los planos paralelos a la LT se pueden abatir ayudándose de la vista lateral, como se ve en este ejemplo:



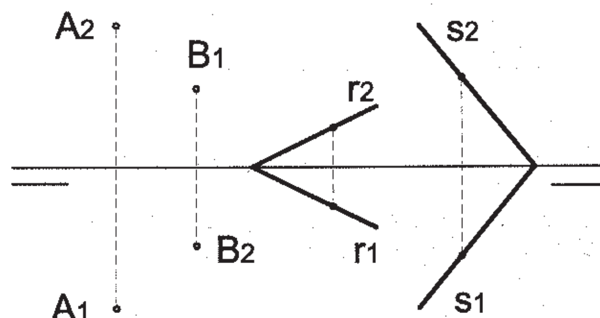
4. PLANOS BISECTORES

Se llaman planos bisectores a los planos que pasan por la LT y forman 45° con los planos coordenados. Hay dos: el 1er y el 2° bisector.

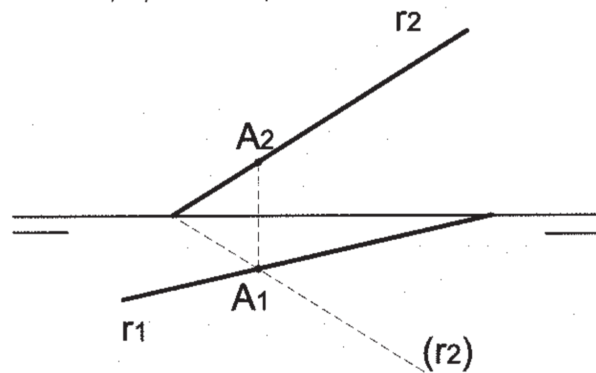
1er bisector



Sus puntos tienen igual cota que alejamiento. Sus recta s están compuestas por puntos que cumplen lo anterior, por lo que los ángulos de r_1 y r_2 con la LT deben ser iguales. Por ejemplo:

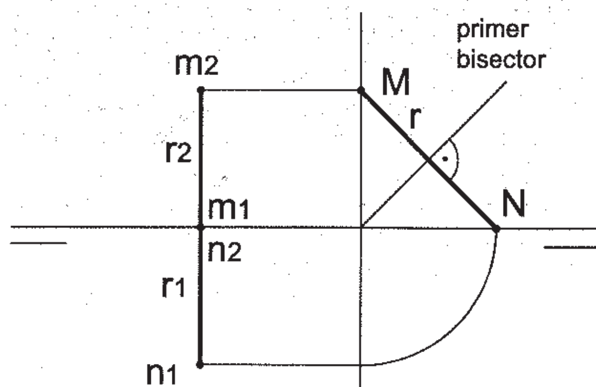


El punto de intersección de una recta r con el 1er bisector debe cumplir lo anterior, es decir, debe tener la cota y el alejamiento iguales. Para hallarlo se trazo una recta simétrica a una de las proyecciones de la recta respecto de la LT, y el punto de corte con la otra proyección cumple la condición.

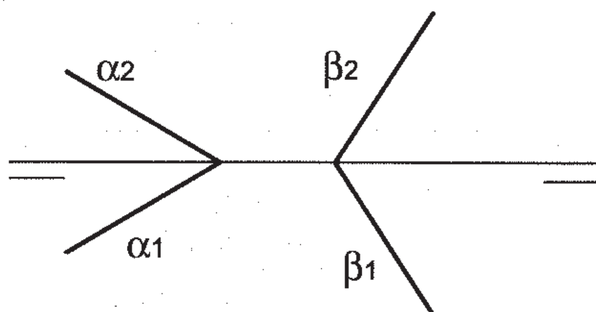


Las rectas perpendiculares al 1er bisector son rectas de perfil que forman 45° con el PH.

* corte de un plano cualquiera α con los bisectores.

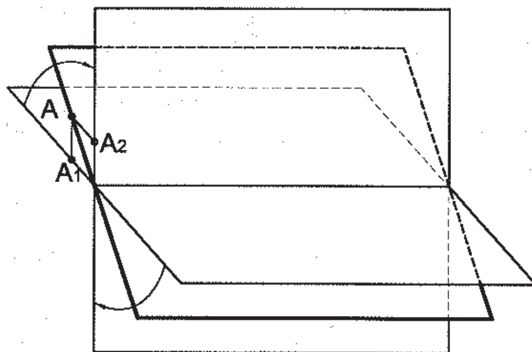


Los planos perpendiculares al 1[er] bisector deben contener a rectas del tipo anterior, lo que se traduce en que α_1 y α_2 formen iguales ángulos con la LT.

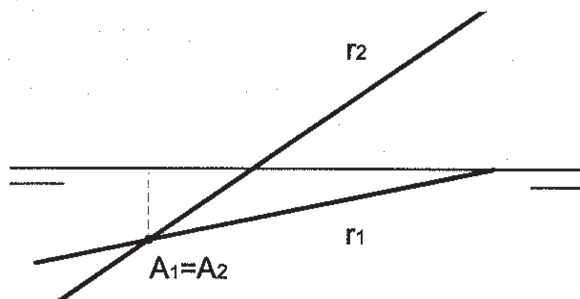


2º bisector

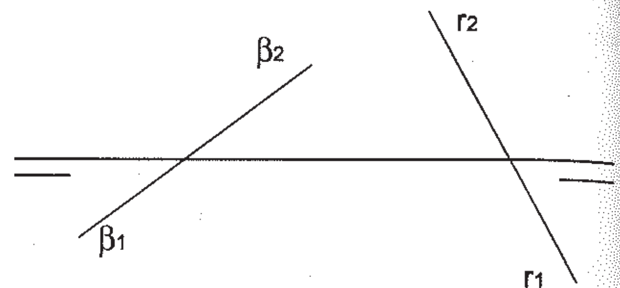
Sus puntos también tienen igual cota que alejamiento, pero con distinto signo, por lo que las dos proyecciones de sus puntos estarán una sobre la otra.



El punto de intersección de una recta con el 2º bisector debe cumplir lo anterior. Coincide con el punto de intersección de r_1 con r_2.

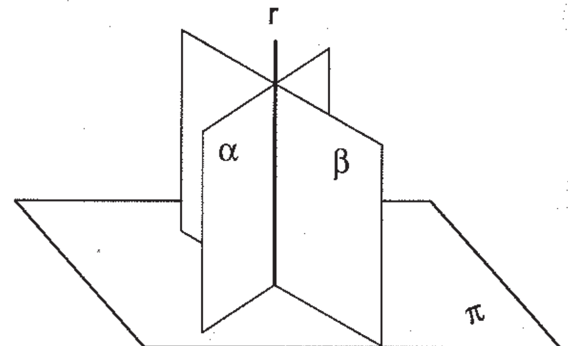


Las rectas del 2º bisector tienen las proyecciones en prolongación, y los planos perpendiculares al 2º bisector tiene sus dos trazas en prolongación.



5. PLANO PERPENDICULAR A OTRO

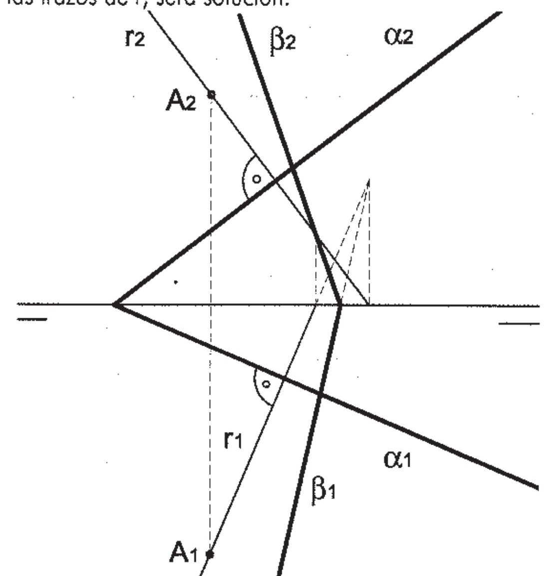
Sea r una recta perpendicular al plano π. Todo plano α ó β que contiene a esa recta es perpendicular al plano π.



Por tanto, si queremos trazar un plano perpendicular a otro, trazaremos primero una recta r perpendicular al plano dado α, y luego un plano cualquiera que pase por ella.

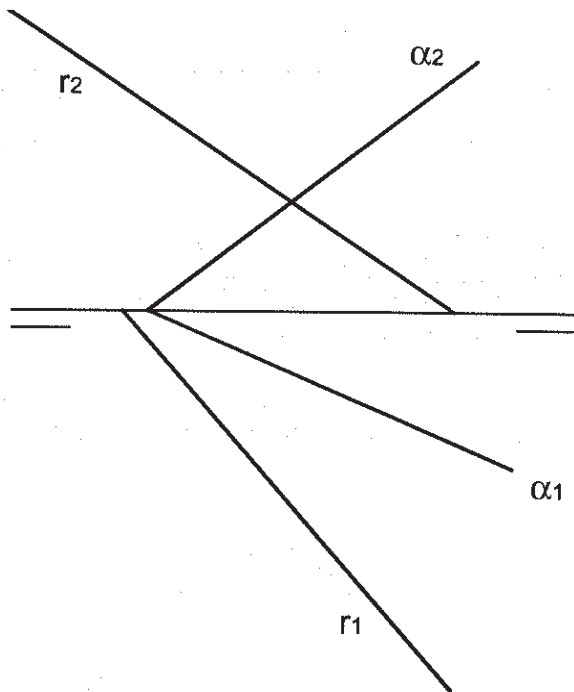
EJERCICIO RESUELTO 7

Trazar por un punto A un plano β perpendicular a otro dado α. Se traza desde el punto A una recta r perpendicular a α, y cualquier plano β que contenga a esa recta, es decir, que pase por las trazas de r, será solución.

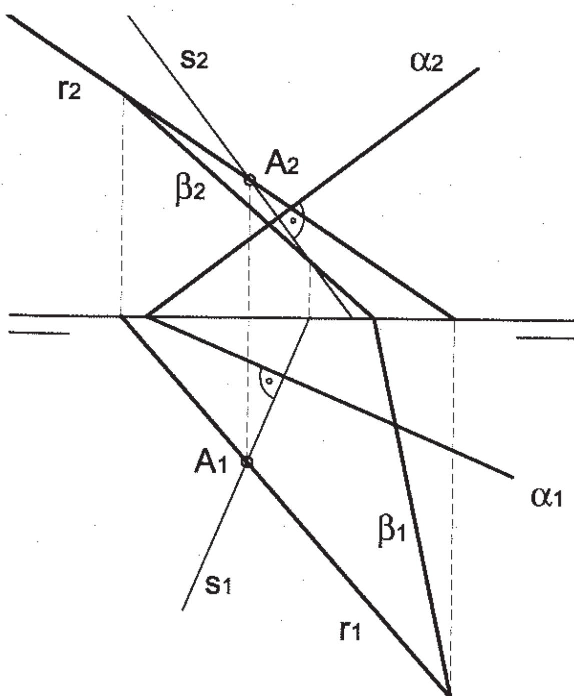


EJERCICIO RESUELTO 8

Trazar por una recta r un plano β perpendicular a otro dado α.

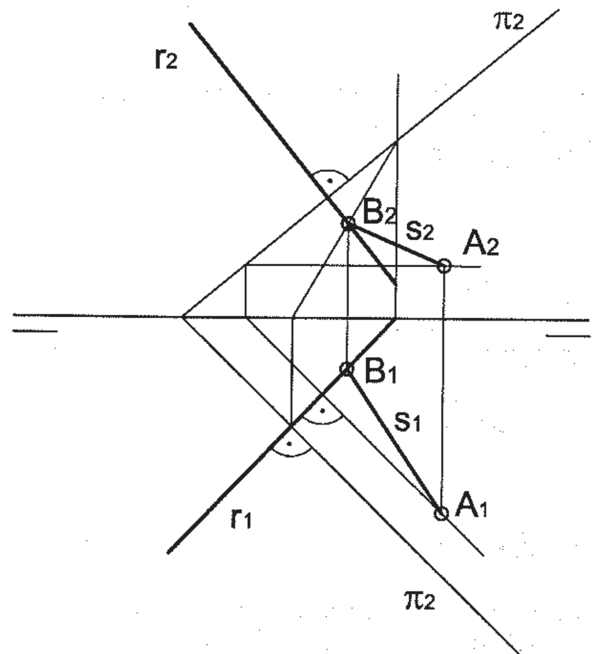


Se coge un punto A de r. Desde él se traza una recta s perpendicular a α. El plano β definido por r y s es la solución.



6. RECTA PERPENDICULAR A OTRA, DESDE UN PUNTO DADO

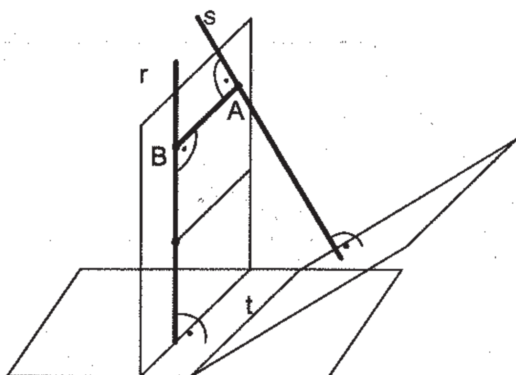
Ya hemos visto que dos rectas perpendiculares no tienen sus proyecciones perpendiculares. Por tanto debemos trazar por el punto A un plano π perpendicular a la recta dada r: todas las rectas de ese plano son perpendiculares a r. Si hallamos el punto B intersección de r con π, la recta AB es la pedida.



También podíamos haber abatido el plano definido por el punto A y la recta r dados. Como el plano abatido está en verdadera magnitud, en él sí se puede trazar la recta s perpendicular a r desde A. Por último habría que desabatir el plano para obtener las proyecciones s_1 y s_2 de la recta solución.

7. MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

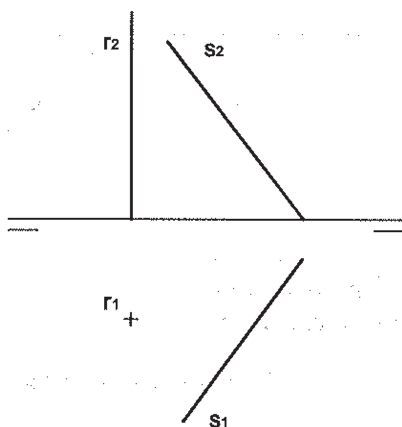
La mínima distancia entre dos rectas r y s es un segmento perpendicular a ambas rectas. Para hallarlo se trazan dos planos cualquiera perpendiculares a las rectas, que se cortan en una recta t, que es perpendicular a r y s, y por lo tanto es paralela a la solución. Por un punto cualquiera de r se traza una recta paralela a t, y queda definido un plano. La intersección de este plano con s es A, un punto de la solución. Por ese punto se traza paralela a t, y donde corte a r es el otro extremo B del segmento solución.



Este proceso se simplifica en algunos casos particulares, como por ejmeplo en el ejercicio siguiente.

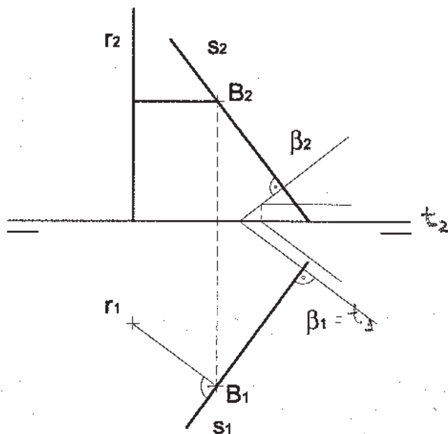
EJERCICIO RESUELTO 9

Obtener las proyecciones del segmento que determina la mínima distancia entre las rectas r y s.



Tracemos un plano β perpendicular a la recta b y otro α perpendicular a la recta a: la solución debe ser paralela a la intersección de estos dos planos, es decir, paralela a una recta horizontal del plano β.

La solución debe cortar a la recta a, por lo que la proyección horizontal debe salir de a_1. Corta a la recta b en B. Y por último, como la solución es una recta horizontal, r_2 será horizontal.



La recta t da la dirección

★ te simplifica

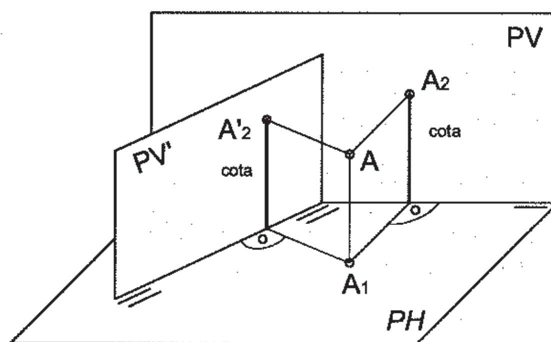
8. CAMBIOS DE PLANOS COORDENADOS

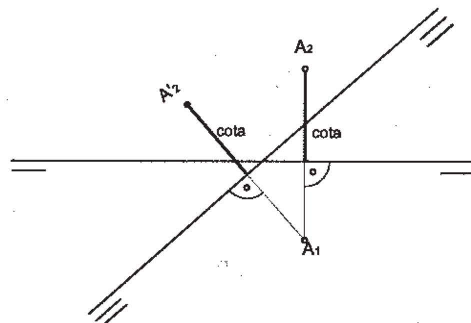
Es una construcción auxiliar que simplifica algunos problemas. Consiste en adoptar un nuevo plano de proyección horizontal o vertical. Por tanto hay un plano coordenado nuevo, uno que se conserva, y una nueva LT, la cual se representa con dos trazos en sus extremos.

La proyección de un punto sobre el plano coordenado que se conserva permanece invariable, así como la cota o el alejamiento. La proyección sobre el nuevo plano coordenado estará en una perpendicular trazada desde la proyección que se conserva a la nueva línea de tierra. Se verá más claro en los siguientes ejemplos.

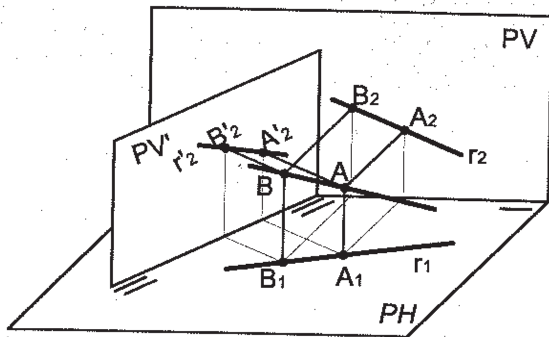
Cambio de plano vertical

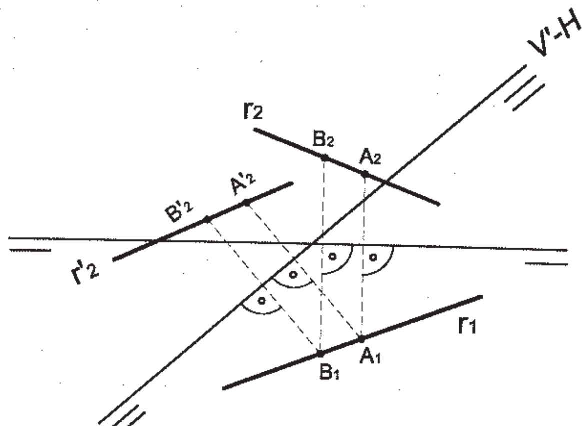
Se traza la nueva LT (en principio, la que nos interese). Desde A_1, que permanece invariable, se trazo una perpendicular a esta nueva LT, y a partir de ella se lleva la cota.





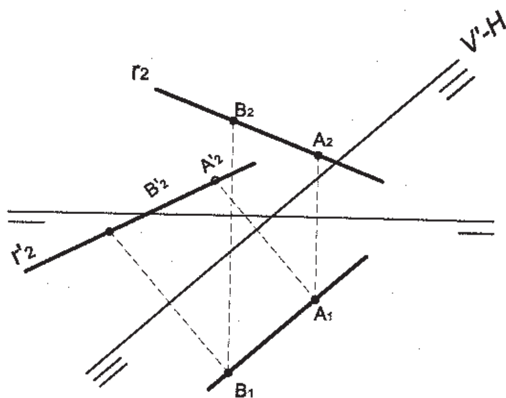
En el caso de la recta, basta cambiar dos puntos. La proyección r_1 permanece invariable.





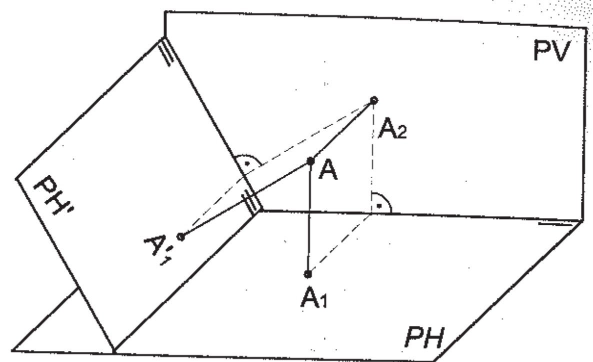
EJERCICIO RESUELTO 10
Colocar de frente una recta r.

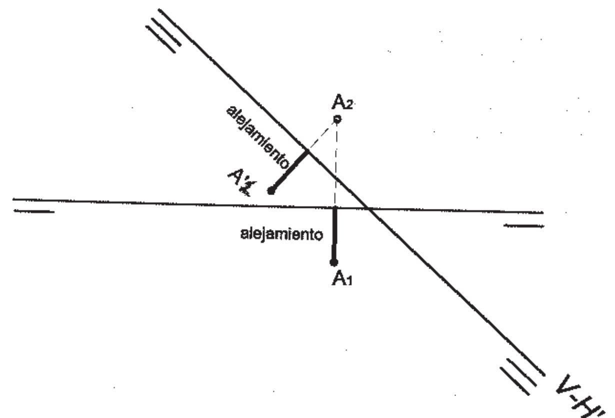
Cogemos una nueva LT paralela a r_1 y hacemos un cambio de plano vertical. Cambiamos dos puntos A y B.
En esta posición de la recta podemos hallar su pendiente o tomar verdaderas magnitudes sobre r_2.



Cambio de plano horizontal

También se puede cambiar al plano horizontal de proyección. Tendremos una nueva LT, y serán las proyecciones verticales las que no cambiarán. Por tanto, para hallar las nuevas proyecciones, trazamos desde a_2, que permanece invariable, una perpendicular a la nueva LT, y a partir de ella se lleva el alejamiento del punto.

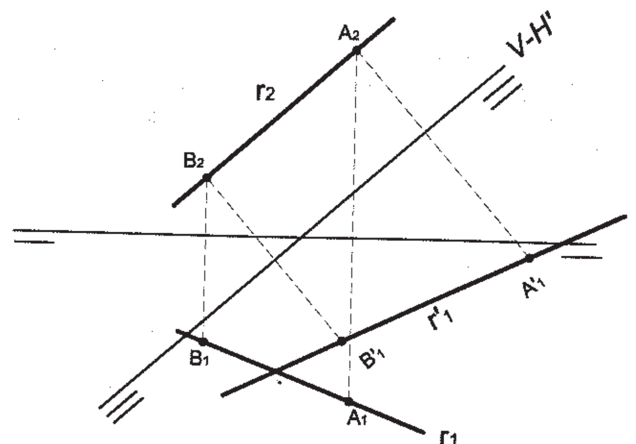




EJERCICIO RESUELTO 11
Colocar horizontal una recta r.

Cogemos una nueva LT paralela a r_2, y hacemos el cambio de plano horizontal.

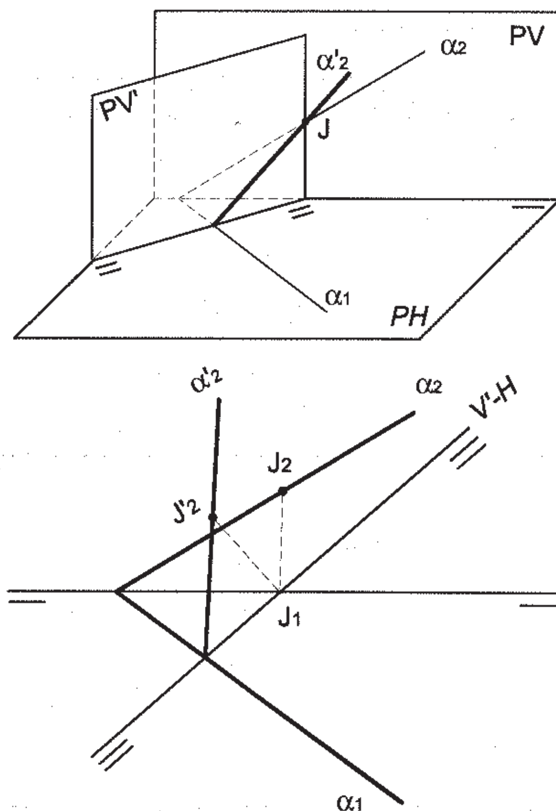
En esta posición de la recta podemos hallar el ángulo que forma con el PV o llevar verdaderas magnitudes sobre r'_1,



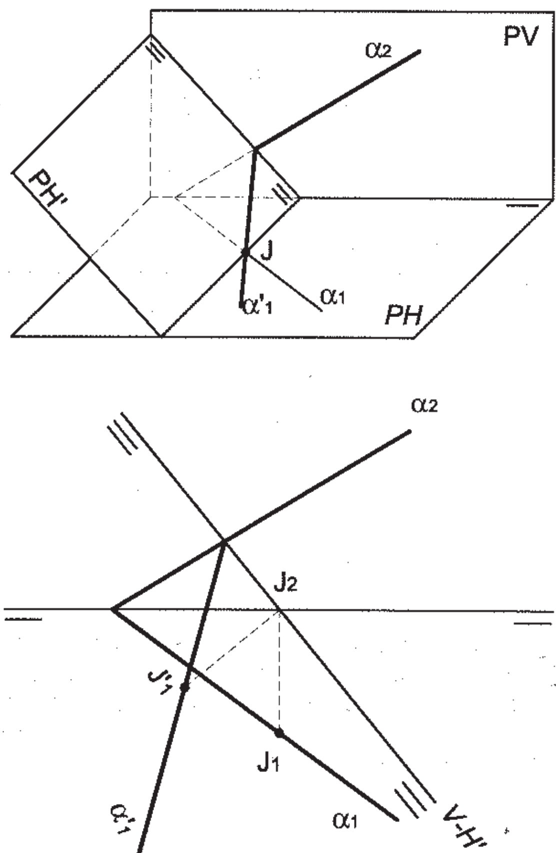
Transformación del plano

Hasta ahora hemos visto el cambio de plano aplicado a puntos y rectas. Pero ¿cómo quedará un plano cualquiera α? Si cambia el PV, α_1 nos sirve hasta su corte con la nueva LT. Pero la nueva traza α_2 no es α_2 cambiada, sino que es otra recta del plano. Sólo tienen en común el punto J. Por tanto se halla este

punto común, se le transforma con el cambio de plano y α'_2 sale al unir J'_2 con la intersección de α_1 con la nueva LT.



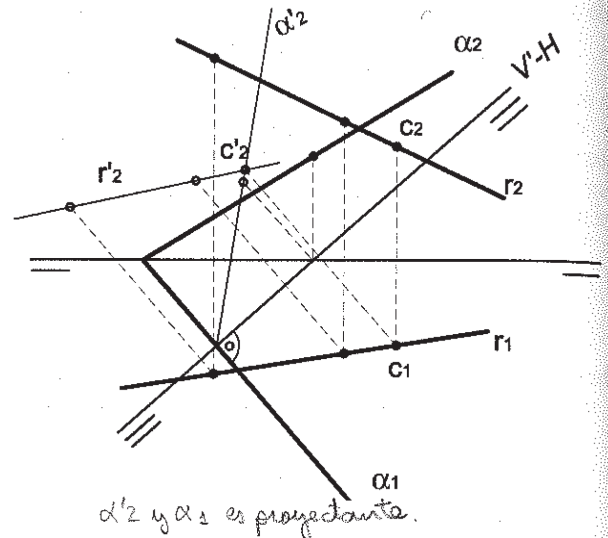
Una construcción similar se hace en el caso de que cambie el PH.



EJERCICIO RESUELTO 12

Hallar la intersección de la recta r con un plano α.

Hacemos un cambio de plano vertical tal que α sea de canto, es decir, que α_1 quede perpendicular a la nueva LT. En ese caso el punto intersección C (C_1-C'_2) es inmediato, y con C_1 obtenemos C_2.

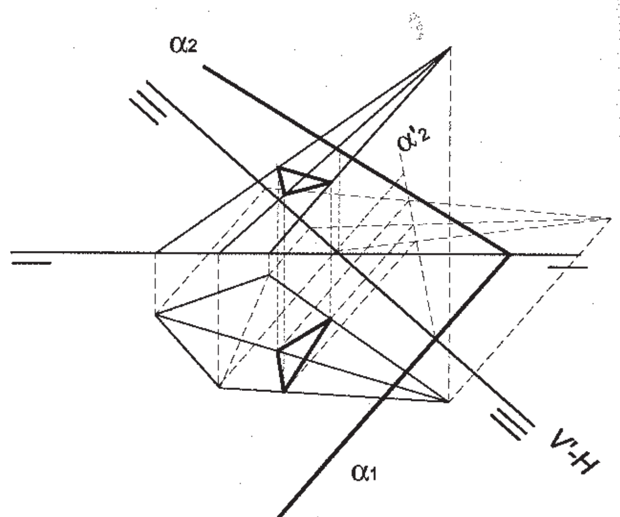


α'2 y α1 es proyectante.

EJERCICIO RESUELTO 13

Hallar el corte de una pirámide por un plano α.

Hacemos un cambio de plano horizontal (del cuerpo y del plano α), cogiendo la nueva LT perpendicular a α_1. Entonces el corte es inmediato, ya que el plano es de canto. Una vez hallada la proyección horizontal del corte, se prescinde del cambio de plano coordenado y se obtiene la proyección vertical.



diferenciar capas de un dibujo "multicapa"

9. GIROS

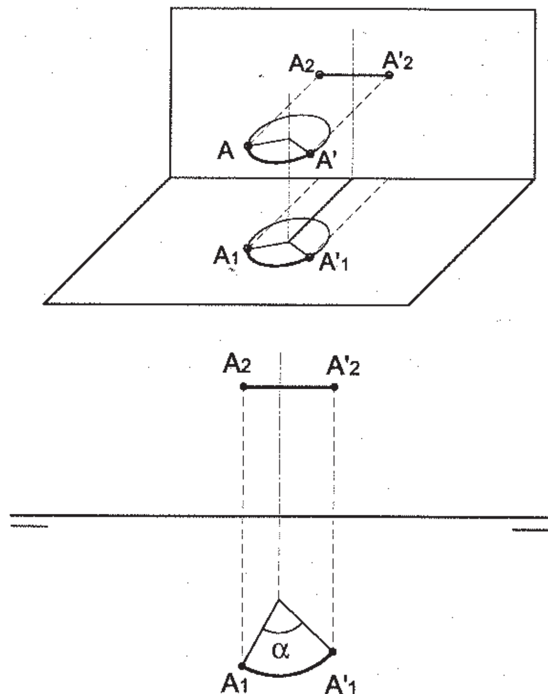
Giro de un punto A alrededor de un eje **e** es el movimiento del punto A describiendo un arco de circunferencia de centro el punto O, intersección del eje **e** con el plano perpendicular a él que pasa por A, y radio la distancia OA.

Los ejes más sencillos son los perpendiculares al PV o al PH.

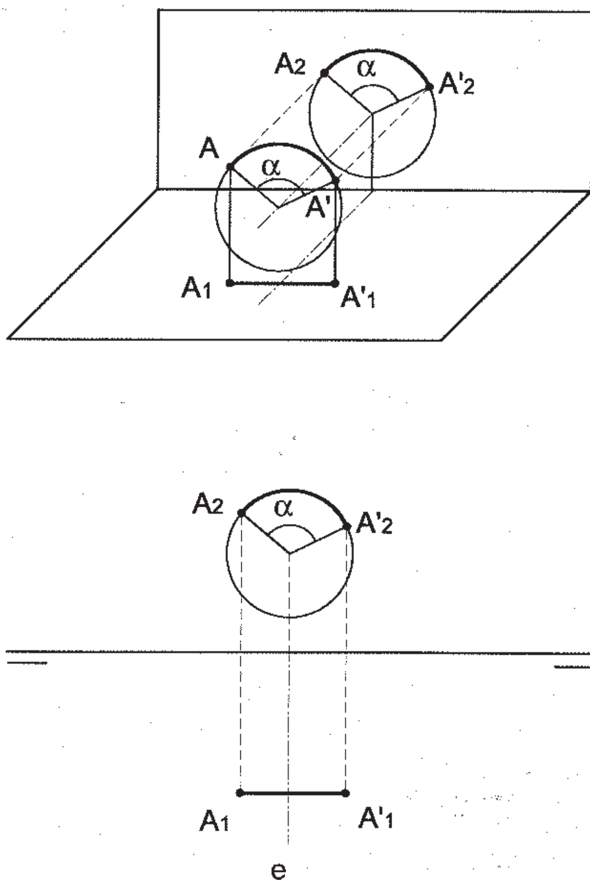
↳ son los únicos ejes que vamos a girar

Giro del punto

Si el eje es vertical, A_1 gira un ángulo α, y A_2 conserva la cota.



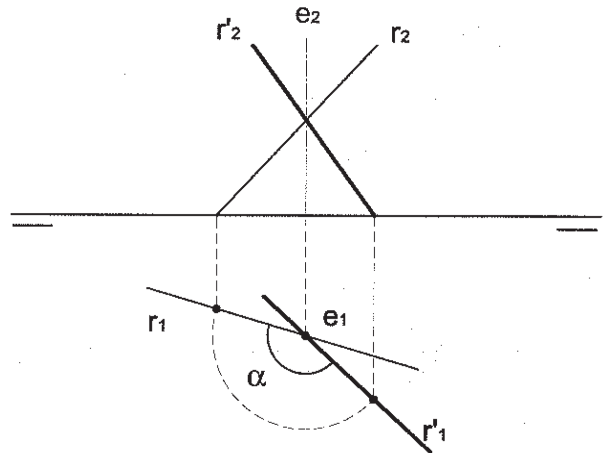
Si el eje de giro es horizontal, A_2 gira un ángulo α y A_1 conserva el alejamiento.



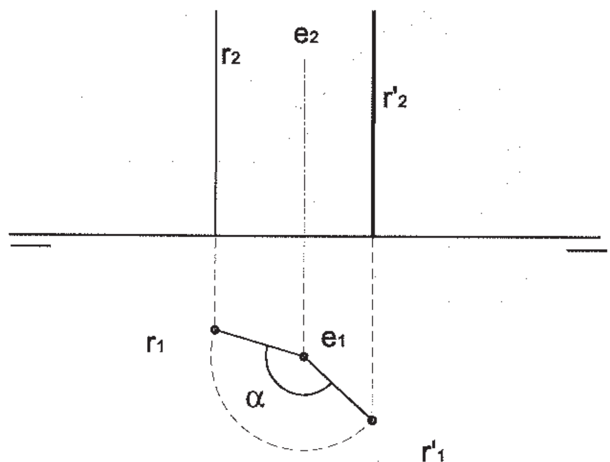
Giro de la recta

Hay tres posibilidades:

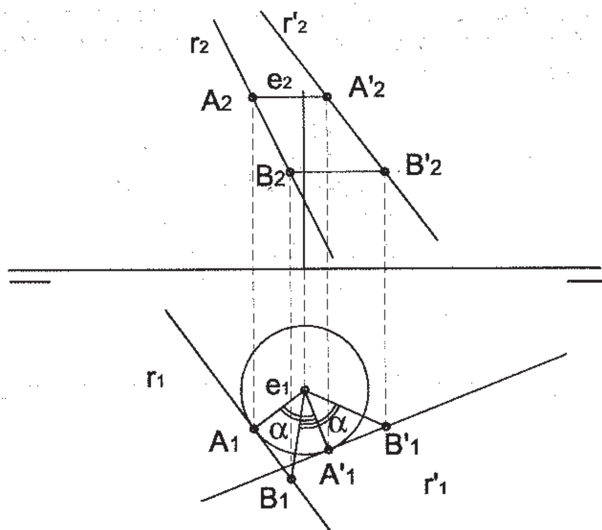
1° Que la recta corte al eje: el punto de intersección gira sobre sí mismo. Basta girar otro punto, por ejemplo la traza horizontal.



2° Que la recta sea paralela al eje: después del giro sigue siendo paralela. Basta girar un punto, por ejemplo la traza horizontal.



3° Que la recta se cruce con el eje: se giran dos puntos. Un punto sencillo es A, el más cercano al eje de giro, que describe una circunferencia tangente a r_1. La r'_1 será también tangente a esa circunferencia. Para girar otro punto B, se traza el arco e_1B_1 hasta que corte a la nueva r'_1. Para hallar r'_2, se tiene en cuenta que A'_2 y B'_2 mantienen la cota.

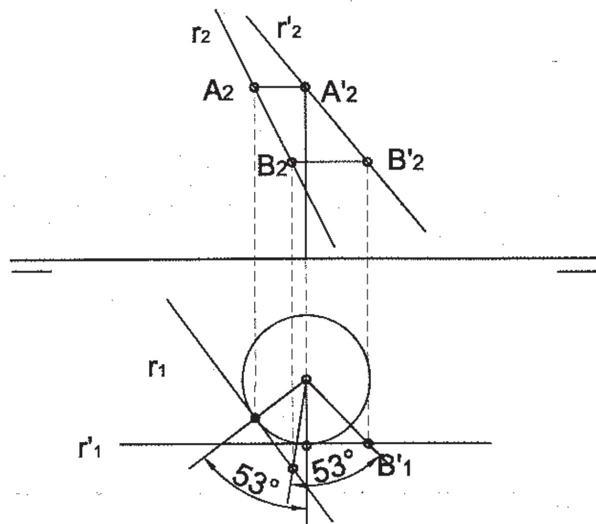


EJERCICIO RESUELTO 14

Mediante un giro, poner la recta r frontal.

Cogemos un eje vertical cualquiera. Desde e_1 trazamos una perpendicular a r_1 que nos determina el punto B más cercano a la recta. Giramos r_1 hasta ponerla paralela a la LT, para que la recta sea frontal. La proyección B'_2 estará en la vertical de B'_1 y con la misma cota que antes del giro.

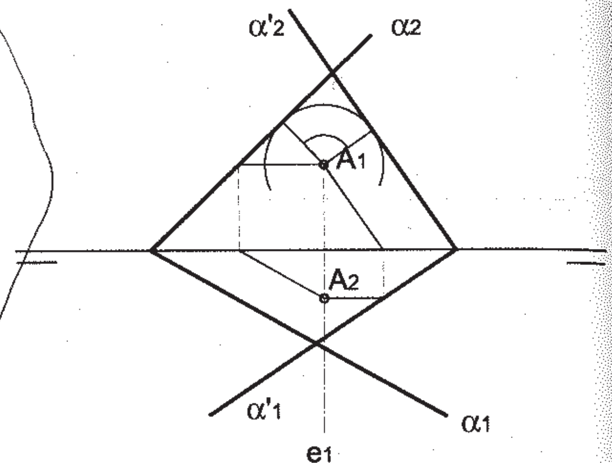
Cogemos otro punto A de la recta. La proyección A'_1 estará en la intersección de r'_1 y el arco de centro e_1 y radio e_1-A_1. La proyección A'_2 estará en la vertical de A'_1 y conservando la cota.



En la recta girada, como es frontal, podemos medir verdaderas distancias en r'_2.

Giro del plano

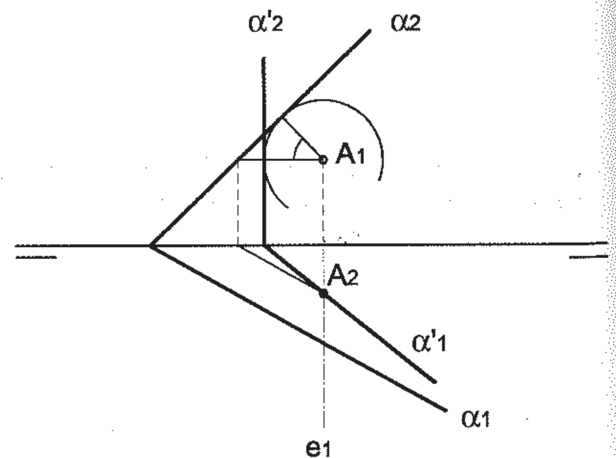
Para girar alrededor de un eje de punta un plano cualquiera α se gira una traza α_2, se halla la intersección del eje y el plano, que es un punto que no se mueve en el giro, y se traza una frontal del plano que pase por ese punto. Por la traza de esta recta pasará α'_1.



EJERCICIO RESUELTO 15

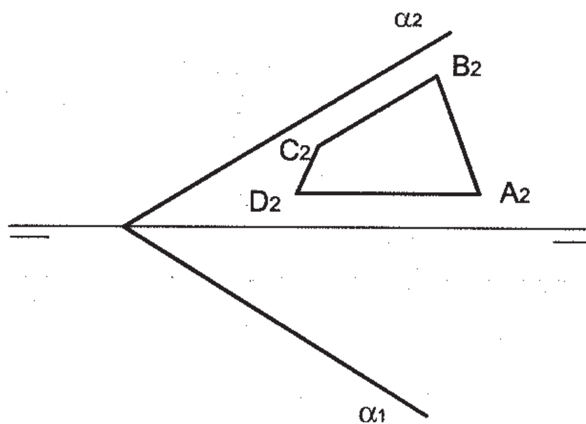
Poner el plano α perpendicular al PH.

Se gira α_2 hasta ponerlo vertical. Se halla la intersección del eje con α, y por la proyección horizontal de este punto, que no se mueve, pasará α'_1 al ser un plano vertical.



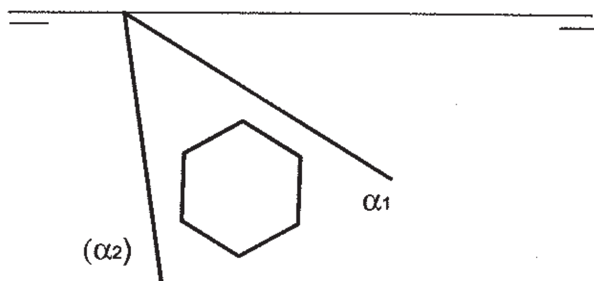
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dado la proyección vertical de un polígono situado en el plano α, se pide hallar la proyección horizontal y la verdadera magnitud.

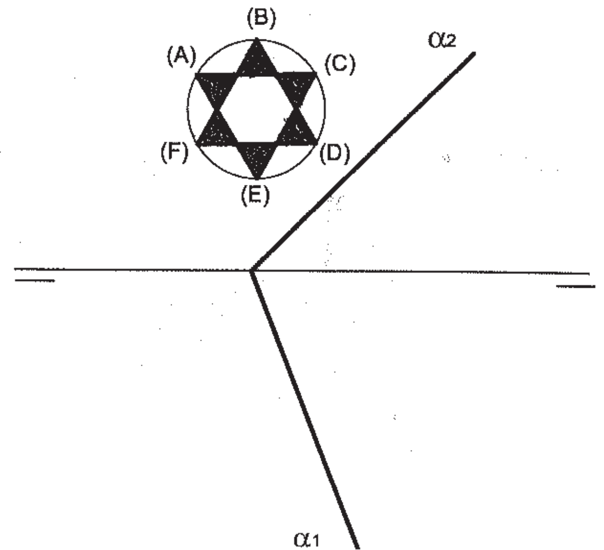


2. Hallar el área del triángulo A(24,18,16); B(12,6,32); C(36,12,42) mm.

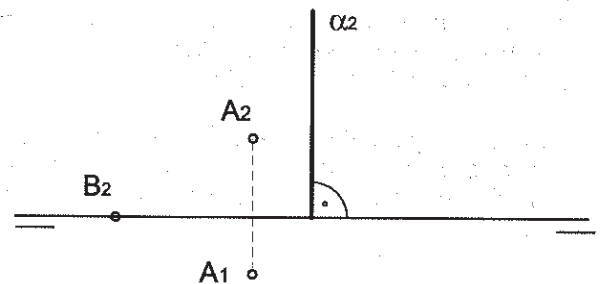
3. Se dan abatidos el hexágono de la figura y la traza vertical del plano que lo contiene. Determinar sus proyecciones.



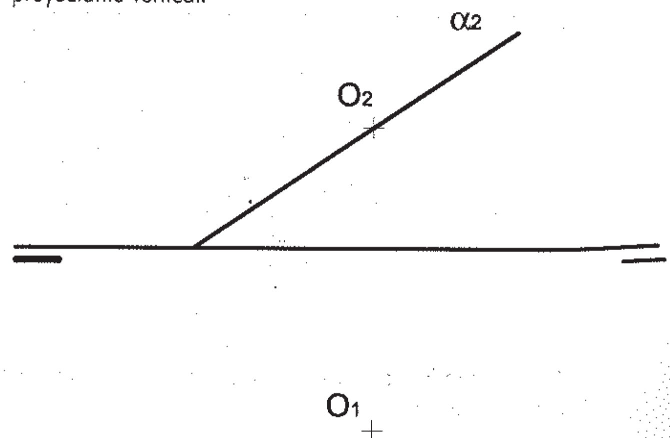
4. Hallar la proyección horizontal y vertical de un polígono situado en el plano oblicuo dado α, a partir de su verdadera magnitud y forma.



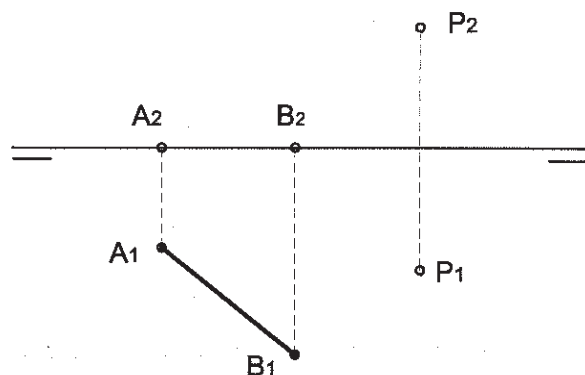
5. Determinar las proyecciones de un triángulo equilátero ABC contenido en el plano α, del que se conocen α_2, las proyecciones de los vértices indicados y que el vértice C es el de mayor cota posible.



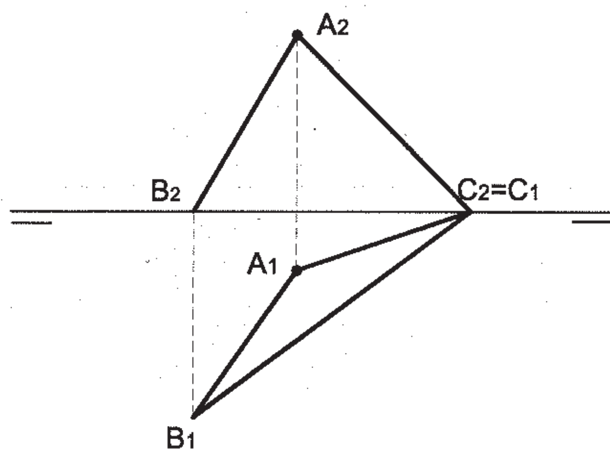
6. Determinar las proyecciones diédricas de la circunferencia de centro O y diámetro 60 mm situada en el plano α, proyectante vertical.



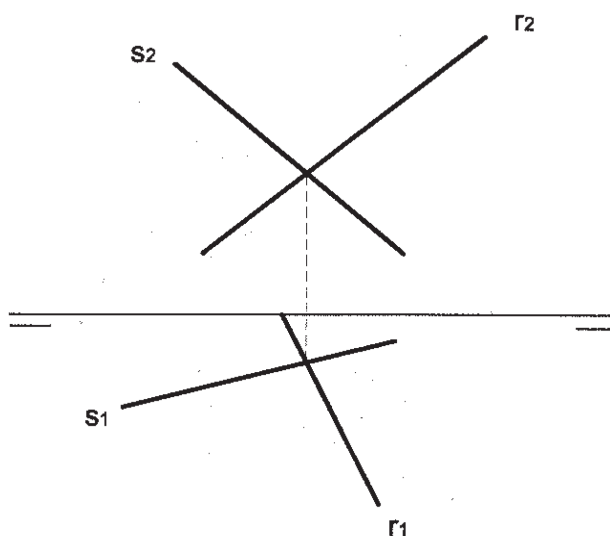
7. Determinar las proyecciones diédricas de un hexágono regular de lado AB situado en el plano definido por los puntos A, B y P.



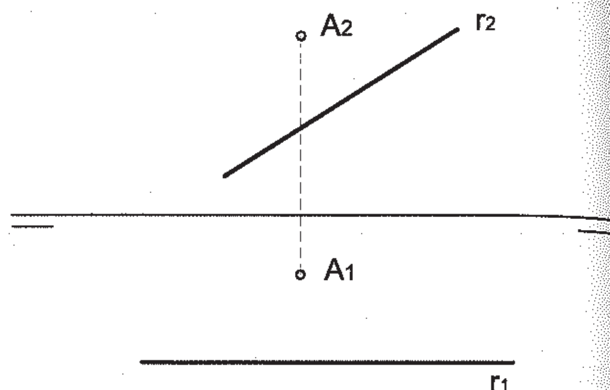
8. Obtener las proyecciones del incentro del triángulo ABC



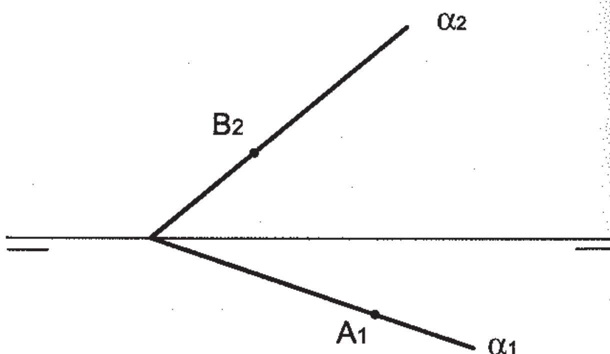
9. Determinar el ángulo formado por las dos rectas dadas.



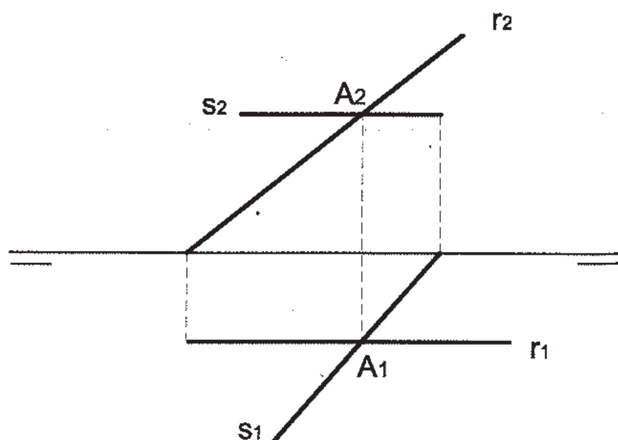
10. Dada la recta frontal r y el punto A, dibujar las proyecciones del triángulo equilátero que tenga un vértice en A y el lado opuesto en r.



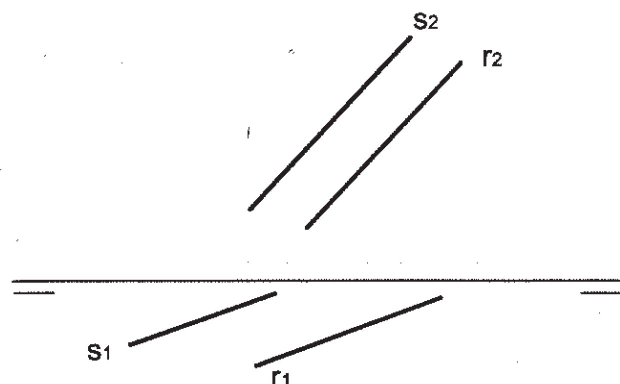
11. Dibujar las proyecciones diédricas de un triángulo equilátero ABC contenido en el plano α. Se conoce la proyección horizontal del vértice A y la vertical del vértice B. Se sabe además que el triángulo queda totalmente contenido en el primer cuadrante.



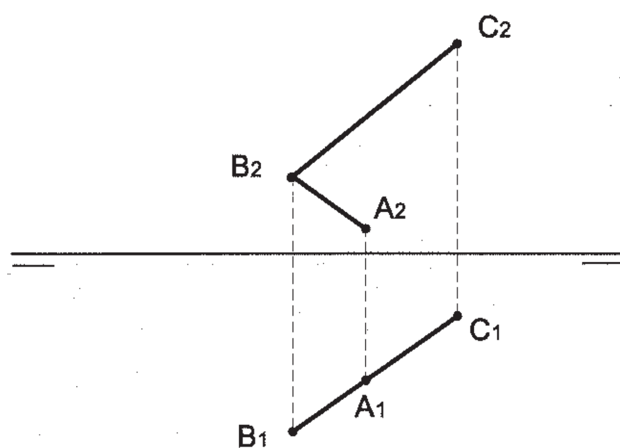
12. Determinar el menor de los ángulos que forman las rectas coplanarias r y s.



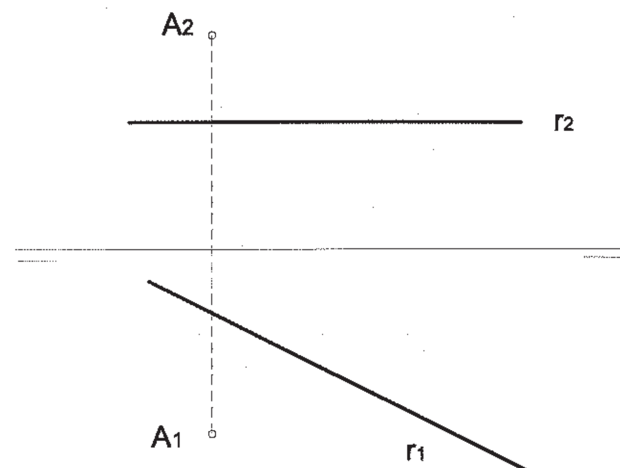
13. Hallar la distancia existente entre las rectas paralelas r y s.



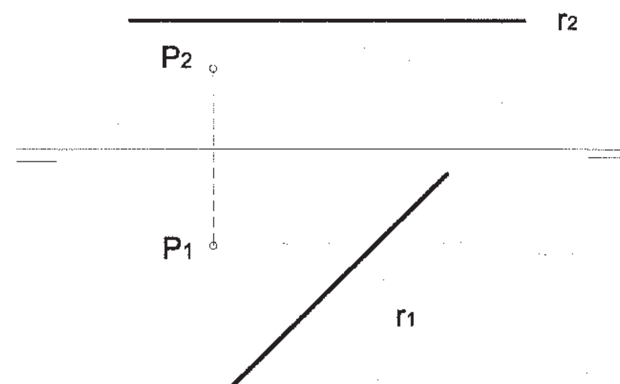
14. Hallar las proyecciones de los lados AD y CD del cuadrilátero ABCD sabiendo que éstos miden 20 y 30 mm respectivamente.



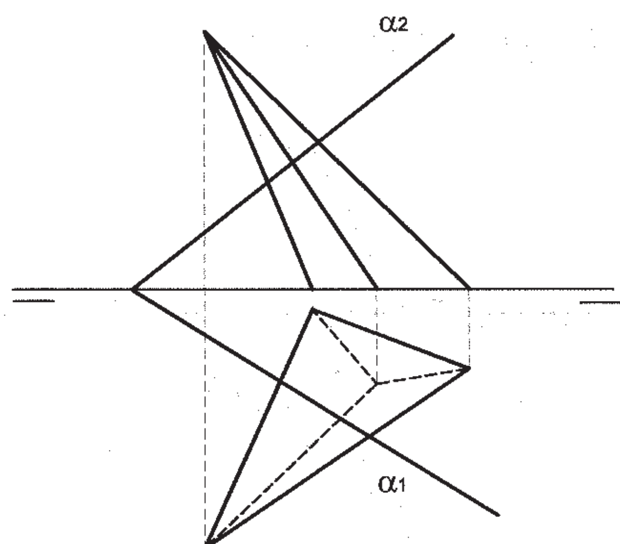
15. Determinar la mínima distancia existente entre el punto A y la recta r.



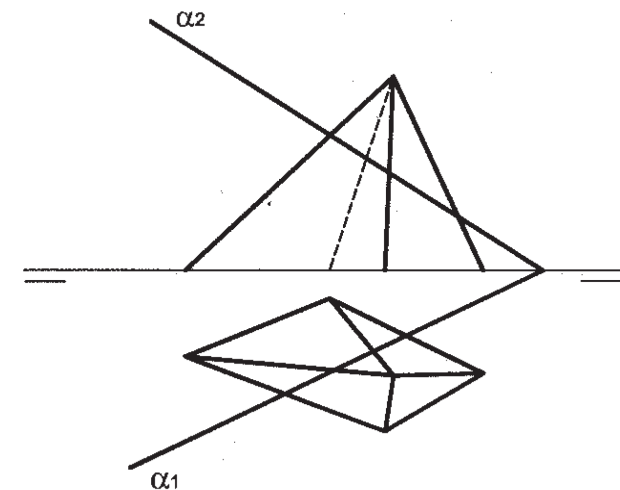
16. Trazar un plano que equidiste del punto P y de la recta r, quedando cada uno de ellos a distinto lado del plano. La distancia del plano al punto P y a la recta r debe ser máxima.



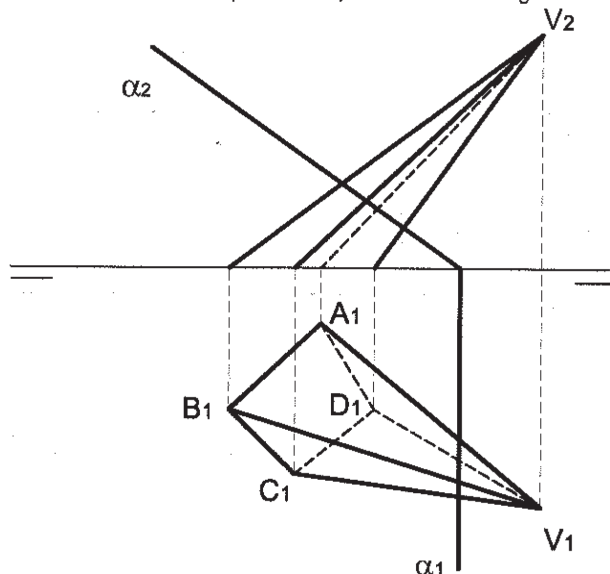
17. Dada una pirámide de base triangular y un plano α, trazar las proyecciones de la sección producida y la verdadera magnitud de dicha sección.



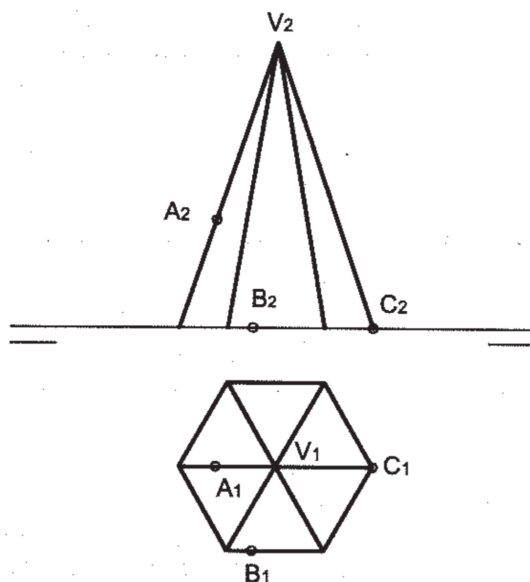
18. Hallar la verdadera magnitud de la sección plana producida en la pirámide por el plano α.



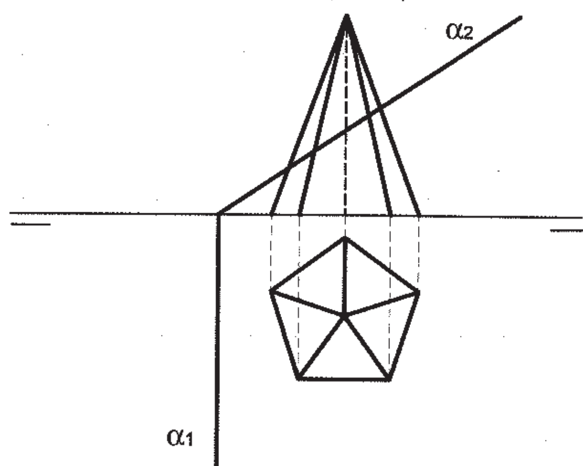
19. Dada la pirámide ABCDV y un plano proyectante α que la corta, hallar la sección producida y su verdadera magnitud.



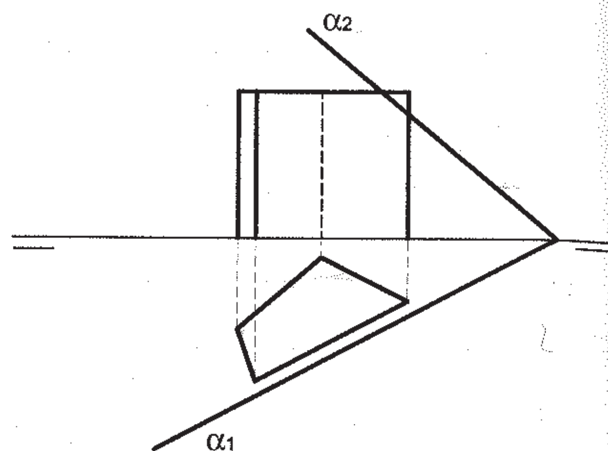
20. Determinar la verdadera magnitud de la sección que produce en la pirámide el plano que pasa por los puntos A, B y C.



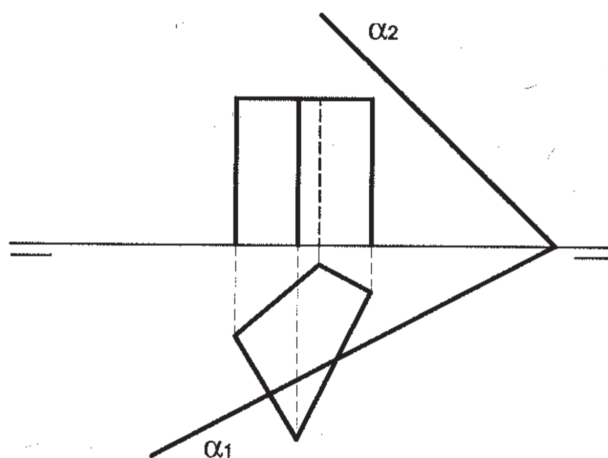
21. Hallar la verdadera magnitud de la sección de la pirámide pentagonal dada, al ser cortada por un plano de canto.



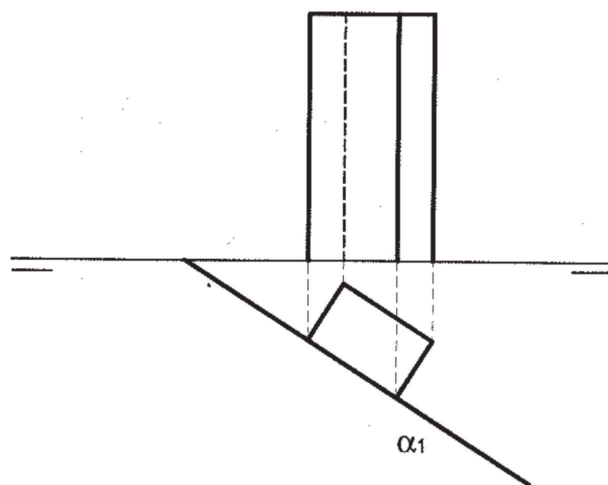
22. Dibujar la sección, verdadera magnitud, desarrollo y transformada de la sección.



23. Seccionar el prisma de la figura por el plano dado, hallando la verdadera magnitud de la sección y el desarrollo.



24. Determinar la traza vertical del plano α para que la sección producida en el paralelepípedo sea, en verdadera magnitud, un cuadrado.



25. Hallar la recta intersección de los planos α y β.

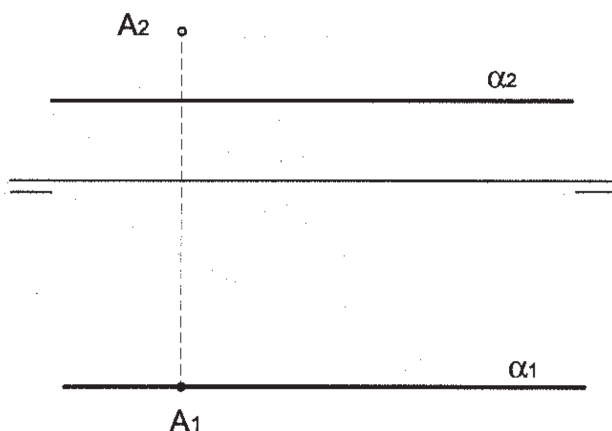
α_2

β_2

α_1

β_1

26. Hallar la distancia del punto A al plano α.



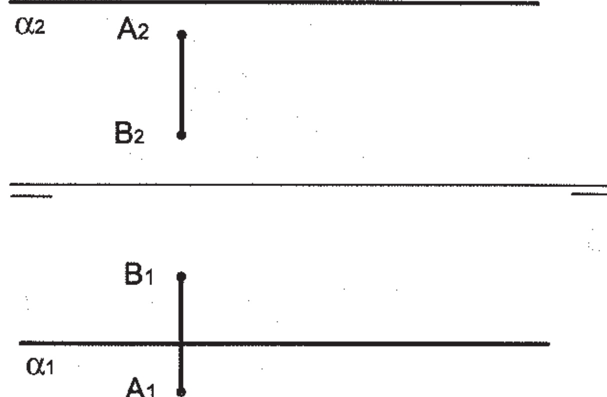
27. Hallar la traza horizontal del plano β sabiendo que es perpendicular al plano α.

α_2

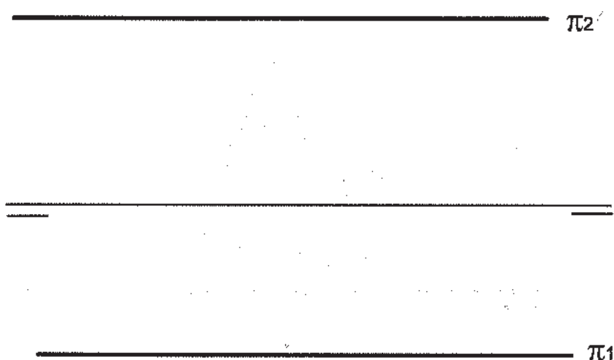
β_2

α_1

28. Hallar las proyecciones del punto intersección del segmento A y B con el plano α.

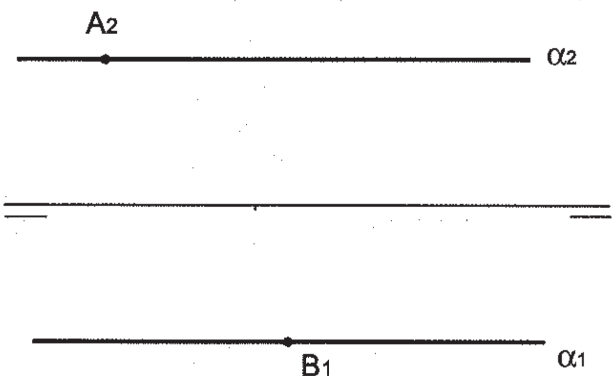


29. Dibujar los planos α y β paralelos al plano dado π y distantes del mismo 15 mm.

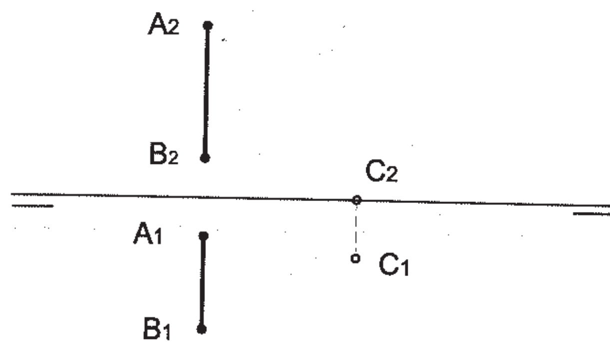


F.L.

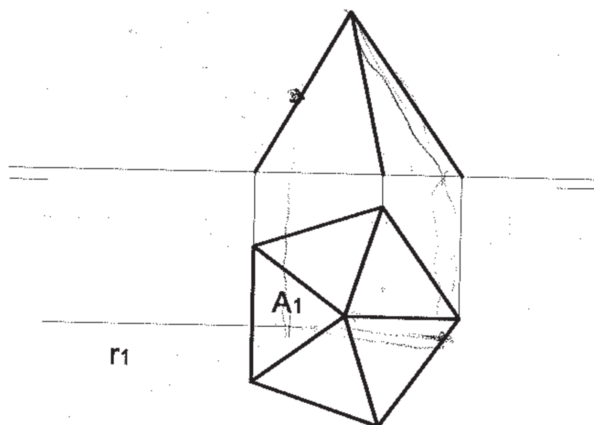
⇒ 30. Dibujar las proyecciones diédricas de un triángulo equilátero ABC, sabiendo que está contenido en el plano α y conociendo la proyección vertical del vértice A y la horizontal del vértice B. De las dos soluciones posibles, elegir la de mayor cota para el vértice C.



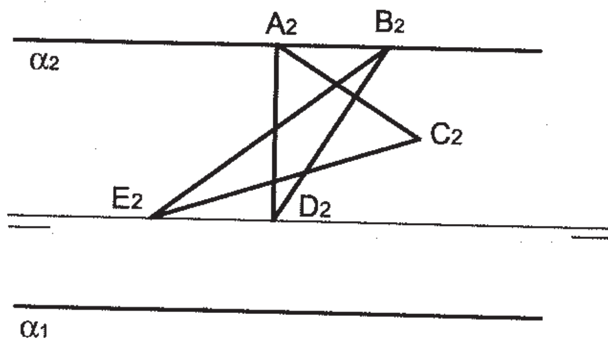
31. Hallar la distancia del punto C a la recta de perfil definida por los puntos A y B.



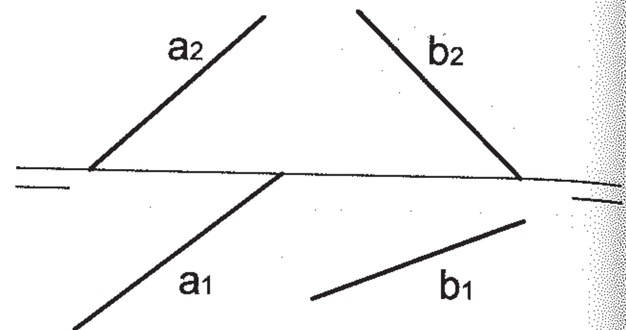
32. Determinar la proyección vertical de la recta frontal r y sus puntos A y B, de la intersección con el prisma, sabiendo que AB=40 mm.



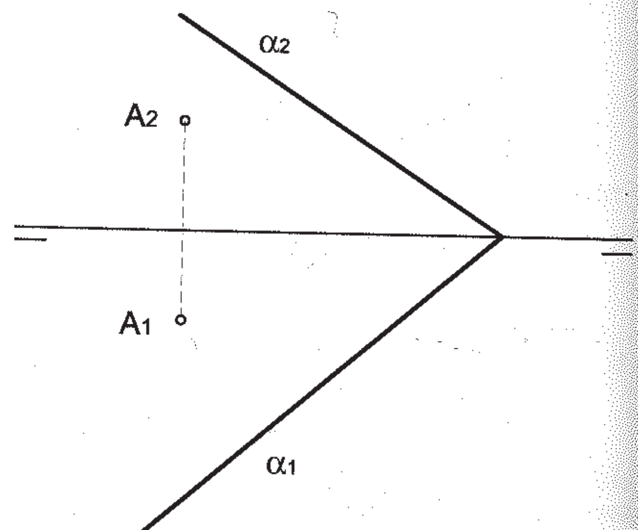
33. Abatir el polígono estrellado que se encuentra contenido en el plano α.



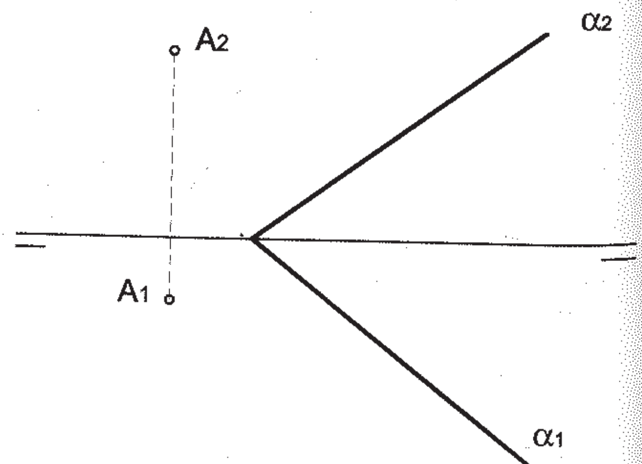
34. Obtener la recta r que, apoyándose en las rectas a y b, sea paralela a la línea de tierra.



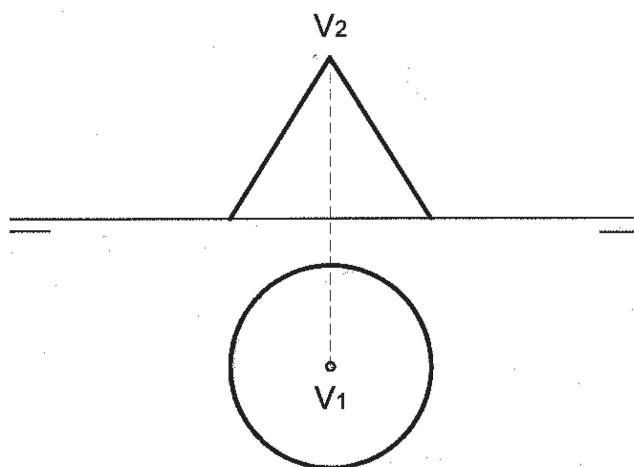
35. Hallar las trazas de una recta de perfil que pase por el punto A y sea paralela al plano α.



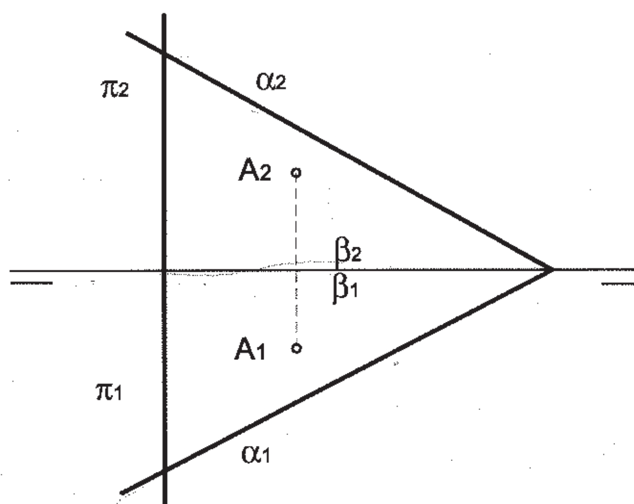
36. Hallar la recta intersección del plano α con el definido por la línea de tierra y el punto A.



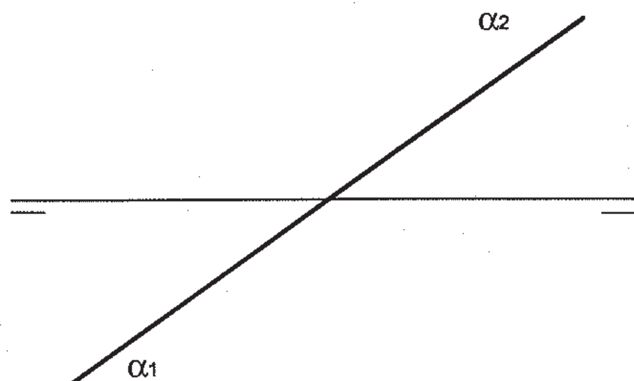
37. Dado el cono de revolución de la figura, dibujar las trazas de los planos que sean tangentes al mismo y paralelos a la línea de tierra.



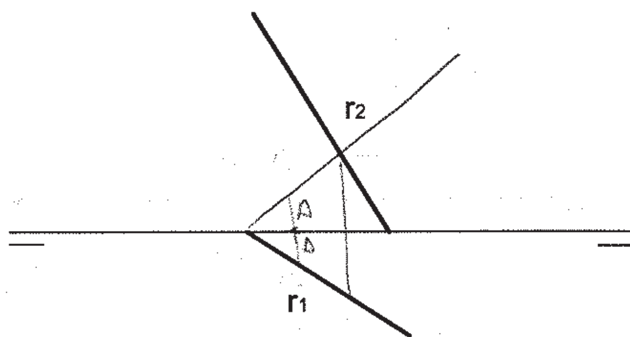
38. Hallar las proyecciones del punto de intersección de los tres planos α, β y π. Obsérvese que el plano β está determinado por el punto A y la línea de tierra.



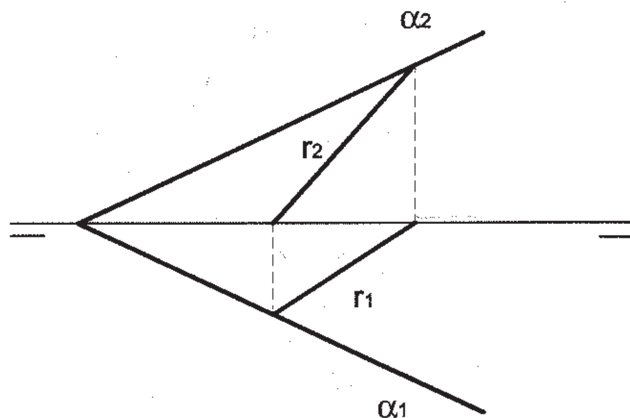
39. Representar las proyecciones de un punto de cota 20 mm. que está contenido en el plano α y en el primer bisector.



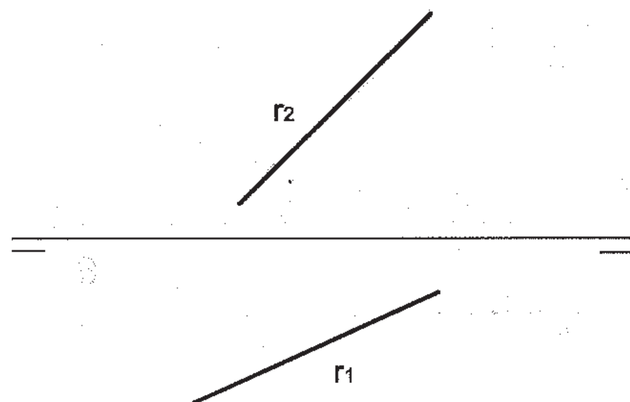
40. Hallar los puntos de intersección de la recta r con los planos bisectores. Indicar los cuadrantes que atraviesa la citada recta.



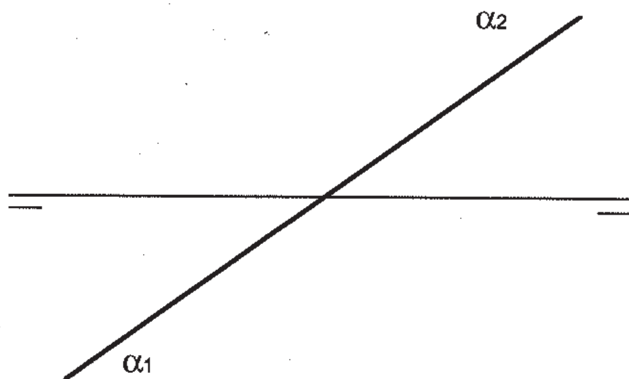
41. Dado el plano α perpendicular al primer bisector y la recta r contenida en α, dibujar las proyecciones de una recta que sea perpendicular a r en su punto de corte con el primer bisector y que quede también contenida en α.



42. Hallar la verdadera magnitud de los ángulos que la recta r forma con los planos de proyección.

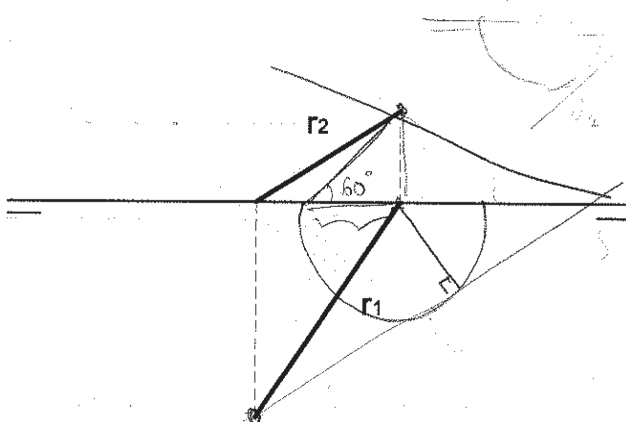


43. Hallar los ángulos que forma el plano α con el horizontal y el vertical de proyección.

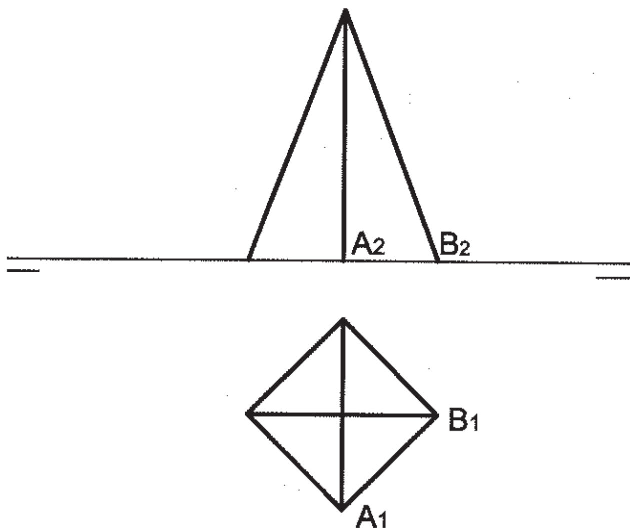


LF ⇒

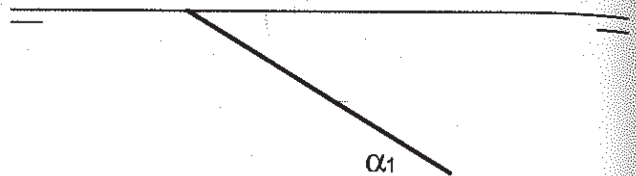
44. Dada la recta r, hallar las trazas de los posibles planos que contengan a dicha recta y que formen 60° con el plano horizontal. → α = 60° → Δ cota.



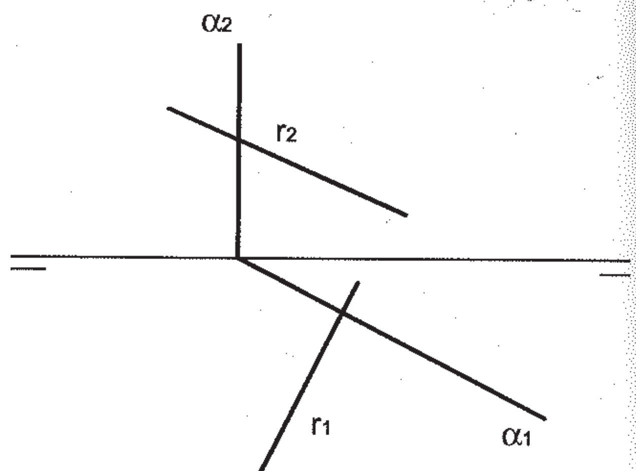
45. Obtener la verdadera magnitud de la sección producida en la pirámide dada por un plano que pasa por AB y forma 45° con el plano horizontal.



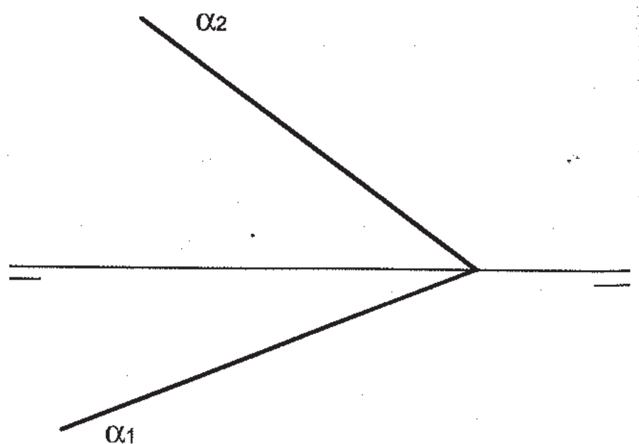
46. Se conoce la traza horizontal α_1 de un plano que forma 60° con el plano horizontal. Dibujar la traza vertical de dicho plano. ¿Cuántas soluciones hay?



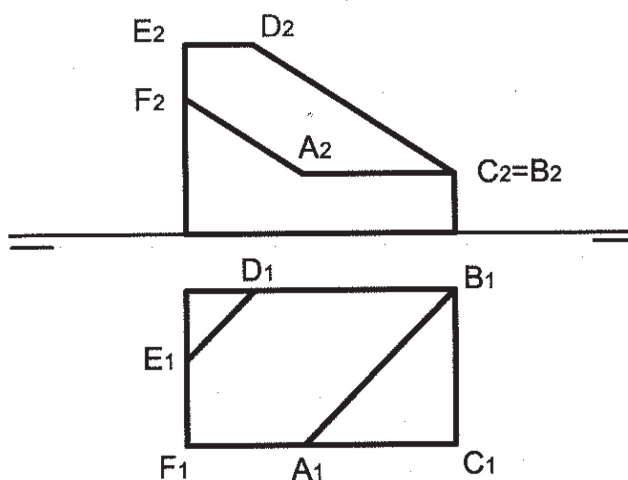
47. Sabiendo que el plano α es vertical y que la proyección r_1 de la recta r es perpendicular a la traza α_1, hallar el punto de intersección de la recta y el plano , y el ángulo que forman.



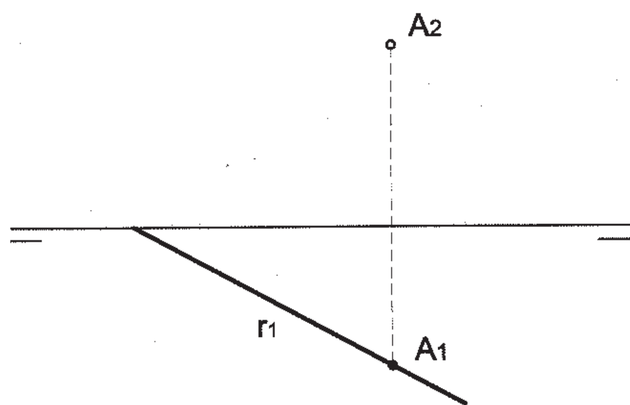
48. Hallar el ángulo que forma el plano α con la línea de tierra.



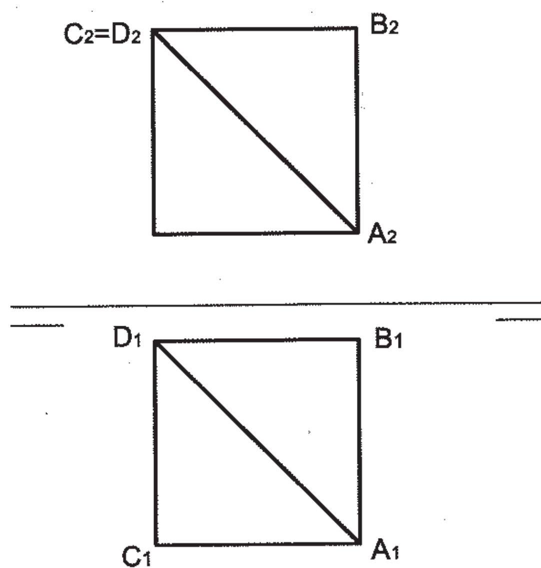
49. Determinar el ángulo que forman los planos ABC y ABDEF.



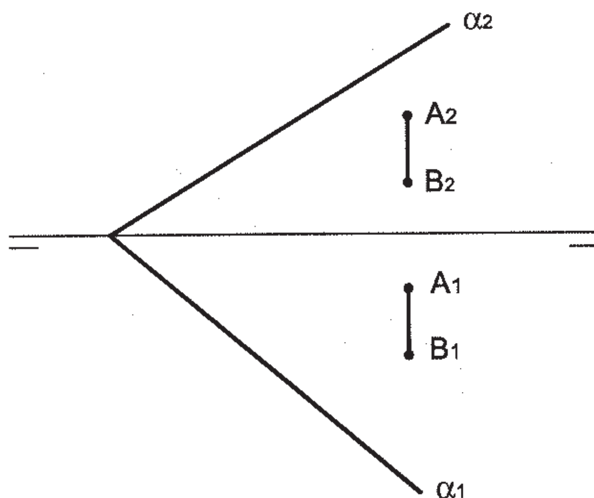
50. Una recta r pasa por los puntos A y B. Este pertenece al PH. Además sabemos que la recta forma 45° con el plano horizontal y está contenida en un plano proyectante sobre el horizontal. Hallar el punto B.



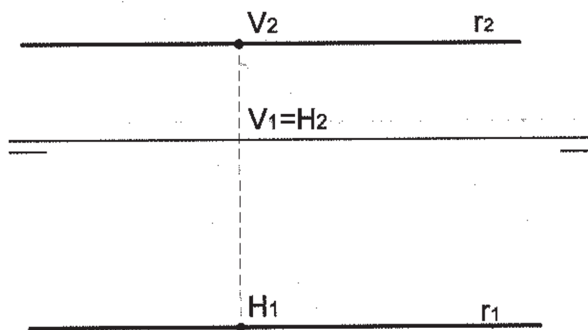
51. Determinar el ángulo que forma la diagonal del cubo AD con el plano definido por los puntos A, B y C.



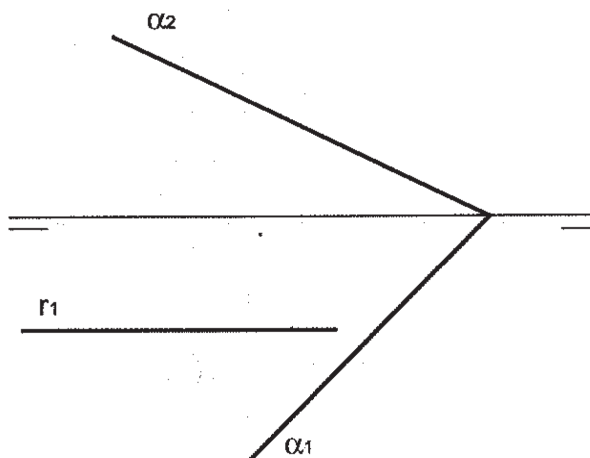
52. Hallar las trazas de un plano β que pase por los puntos A y B y sea perpendicular al plano α.



53. Dibujar las trazas de la perpendicular común a la recta de perfil de trazas H y V y a la recta r paralela a la línea de tierra.

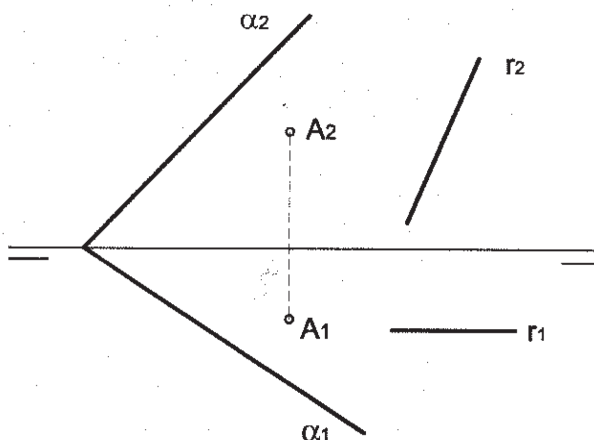


54. Dada la recta r contenido en el plano α hallar el plano perpendicular a α que pase por r.

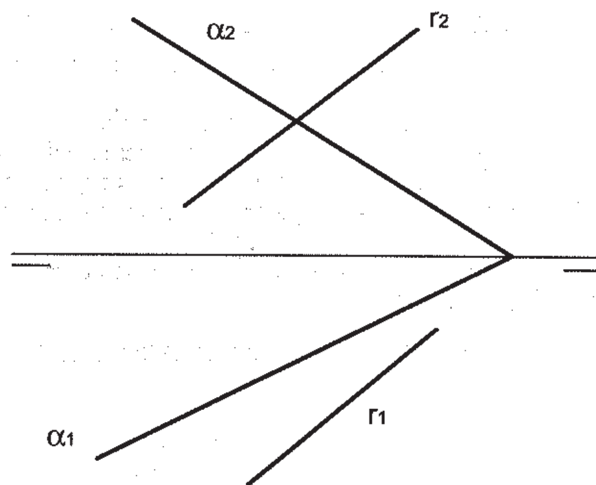




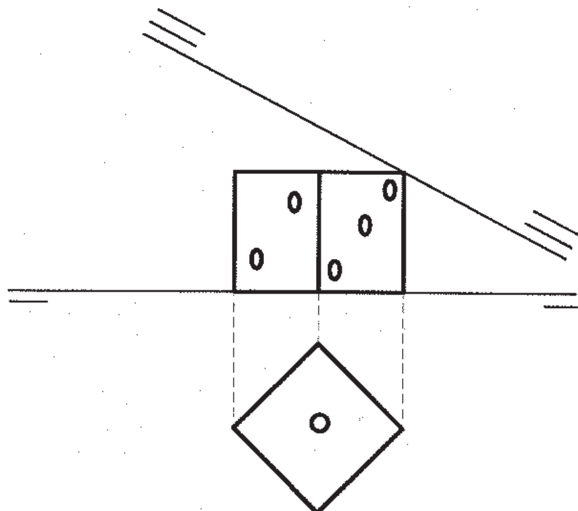
55. Hallar el plano β que pasa por el punto A y es perpendicular al plano α y paralelo a la recta r.



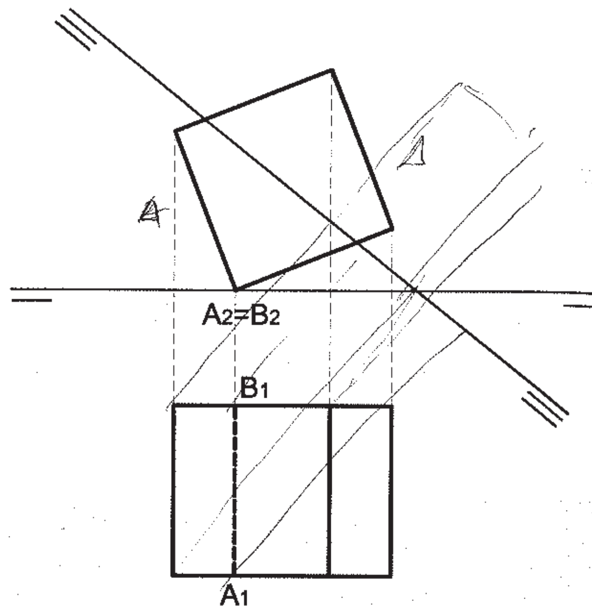
56. Hallar las trazas del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta .



57. Obtener la planta auxiliar indicada por la nueva línea de tierra del hexaedro representado. En las caras vistas de esta nueva planta, marcar el número de huellas, sabiendo que son siete la suma de las de dos caras opuestas.



58. Dado el cubo inferior en diédrica, apoyado en la arista AB, hallar la nueva posición vertical al mover el plano vertical mediante el cambio de plano definido por la nueva LT.

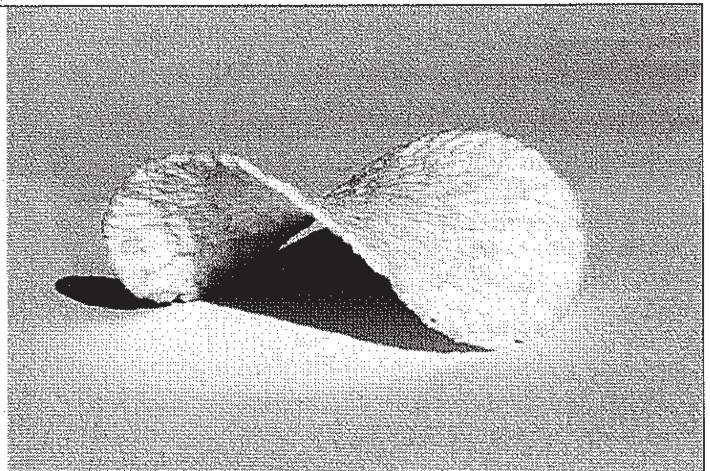


59. Dado un plano oblicuo en el sistema diédrico con vértice a la izquierda de la LT, cuyas trazas horizontal y vertical forman 60° y 45° respectivamente con la LT, mediante un cambio de plano transformarlo en un plano perpendicular al vertical.

60. Dado un plano oblicuo en el sistema diédrico con vértice a la izquierda de la LT, cuyas trazas forman 45° cada una con la LT, situarlo, mediante giro, perpendicular al plano vertical.

TEMA 13

SUPERFICIES

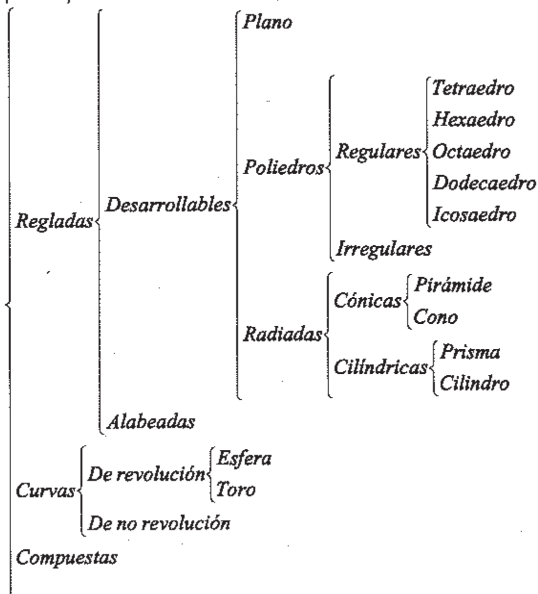


1. SUPERFICIES EN EL ESPACIO

Superficie es el lugar geométrico de las posiciones de una línea, indeformable o no, llamado **generatriz,** que se mueve en el espacio según una determinada ley.
Si la generatriz se apoya en una curva o en una superficie, ésta se llama **directriz.**
Las superficies pueden ser limitadas, es decir, con área finita, o ilimitadas, con área infinita.

Clasificación de las superficies

Aunque hay otras clasificaciones, una sencilla es:

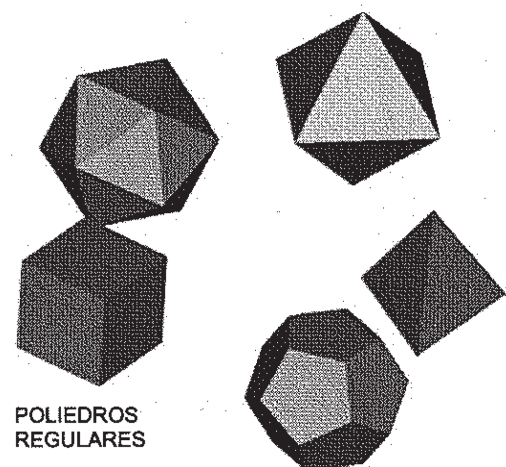


Podemos definirlas de la siguiente forma:

Regladas: Son las engendradas por el movimiento de una recta.

Superficies curvas: Son las engendradas por el movimiento de una curva.
Compuestas: Formadas por la combinación de otras.
Desarrollables: Pueden extenderse sobre un plano sin que se deforme ninguno de sus elementos.
Alabeadas: No se pueden desarrollar sobre un plano.
Poliedros: Son las superficies formadas por caras planas.
Radiadas: Engendradas por el movimiento de una recta que se apoya constantemente en un punto fijo, que puede estar en el infinito, y en una línea plana o alabeada.
De revolución: Engendradas por el movimiento de una línea que gira alrededor de un eje fijo.

SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES

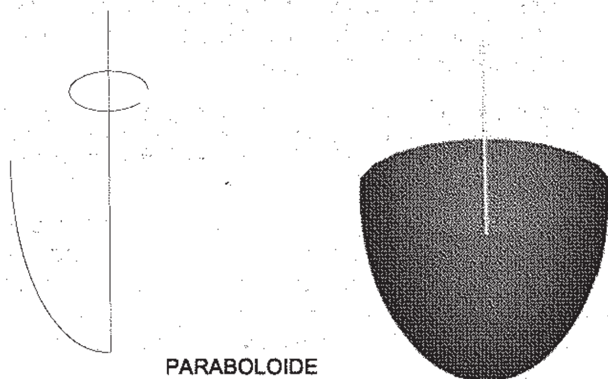


PRISMA

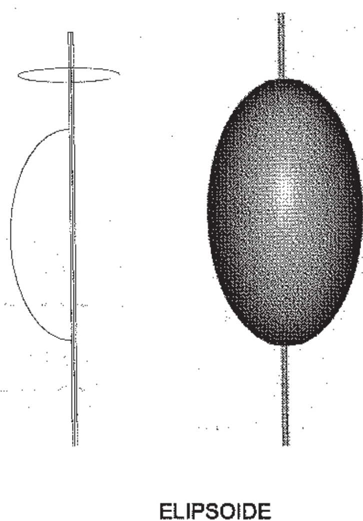
PIRÁMIDE

POLIEDRO

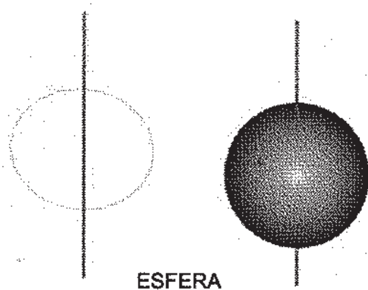
SUPERFICIES CURVAS DE REVOLUCIÓN



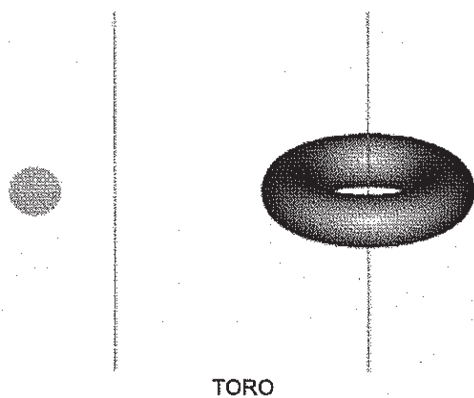
PARABOLOIDE



ELIPSOIDE

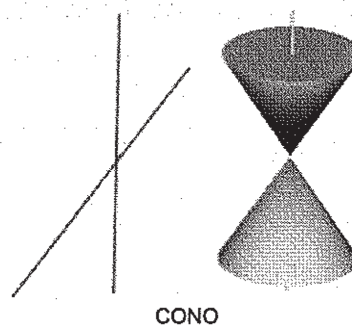


ESFERA



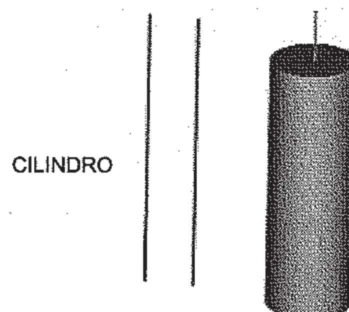
TORO

SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES RADIADAS



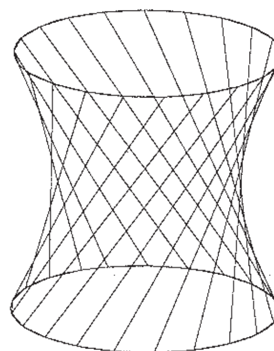
CONO

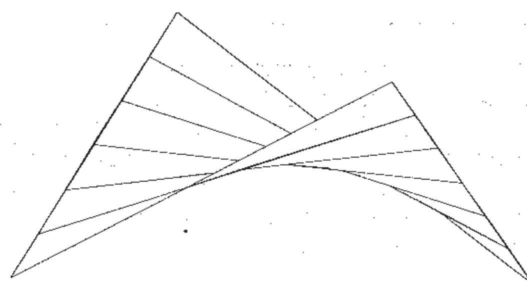
CILINDRO



SUPERFICIES REGLADAS ALABEADAS

HIPERBOLOIDE DE REVOLUCIÓN





PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

2. POLIEDROS

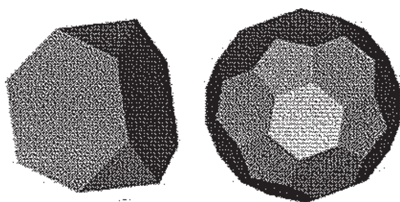
Poliedros son las figuras cerradas formadas por varios planos. Todos cumplen el **teorema de Euler**:

n° de caras + n° de vértices = n° aristas + 2
C+V=A+2

Se llaman **poliedros regulares** a los poliedros que cumplen tres condiciones: las caras son polígonos regulares, todas las caras son iguales y sus ángulos poliedros son también iguales. Con esas condiciones sólo hay cinco poliedros:

Nombre	C	V	A	Forma de las caras	Tipo de vértices	Forma
Tetraedro	4	4	6	Triángulos	Triedro	
Hexaedro o Cubo	6	8	12	Cuadrados	Triedro	
Octaedro	8	6	12	Triángulos	Tetraedro	
Dodecaedro	12	20	30	Pentágonos	Triedro	
Icosaedro	20	12	30	Triángulos	Pentaedro	

Se llaman **poliedros arquimedianos** a aquellos semirregulares convexos cuyas caras son polígonos regulares pero de distinto número de lados. Se pueden obtener truncando los regulares. Por ejemplo, truncando el tetraedro a un tercio de cada arista sale un poliedro formado por hexágonos y triángulos regulares. Otro ejemplo es el poliedro de Leonardo da Vinci, que es arquimediano del icosaedro.

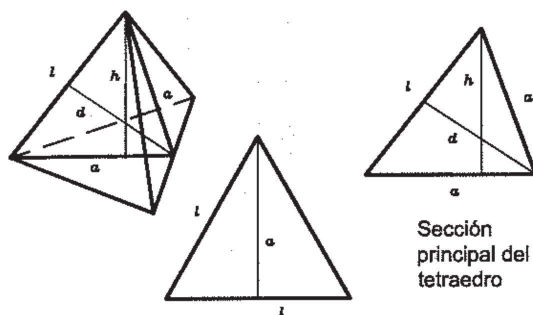


Vamos a estudiar los tres primeros poliedros regulares y su representación en diédrica. Para ello nos van a ser muy útiles las llamadas secciones principales.

3. SECCIONES PRINCIPALES

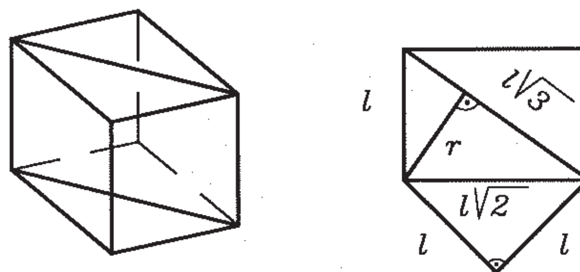
Si se cortan los poliedros regulares por un determinado plano, la sección producida contiene las medidas más importantes del cuerpo, necesarias para representarlos en diversas posiciones: el lado, la distancia entre caras opuestas, las diversas diagonales, la distancia entre aristas, etc.. Esa sección se llama principal.

En el caso del tetraedro, la sección principal se obtiene al cortarlo por un plano que pasa por una arista y por el punto medio de la arista opuesta.



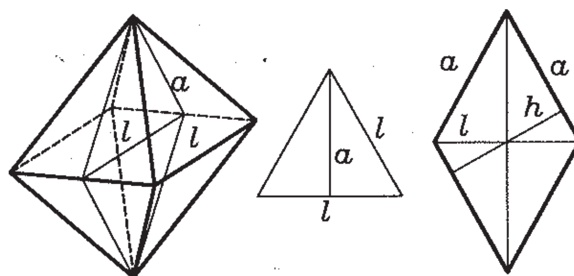
Sección principal del tetraedro

En el hexaedro o cubo, la sección principal pasa por dos aristas opuestas.



Sección principal del cubo

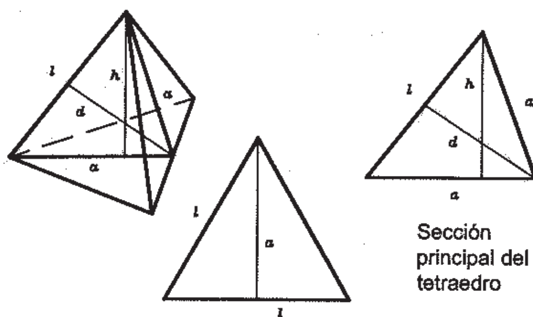
En el octaedro, la sección principal pasa por dos vértices opuestos y por los puntos medios de dos lados.



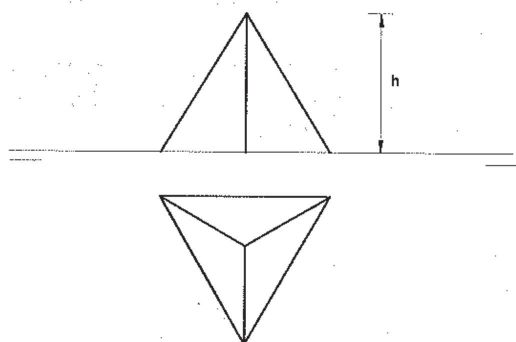
Sección principal del octaedro

4. TETRAEDRO

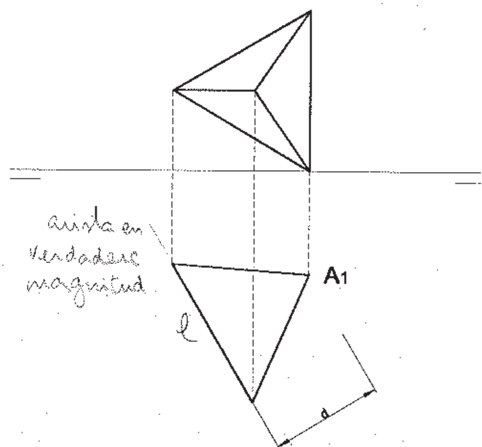
Es el poliedro formado por cuatro caras triángulos equiláteros, cuatro vértices y seis aristas.
Para representarlo con una cara apoyada en el PH, se dibuja ésta, que es un triángulo equilátero en verdadera magnitud. El cuarto vértice se proyecta en el ortocentro de la base.
Para hallar la altura del tetraedro, se debe construir la sección principal. Para eso primero se determina a, altura de una cara, y con ella y l se dibuja la sección principal. La altura buscada es h.



Sección principal del tetraedro



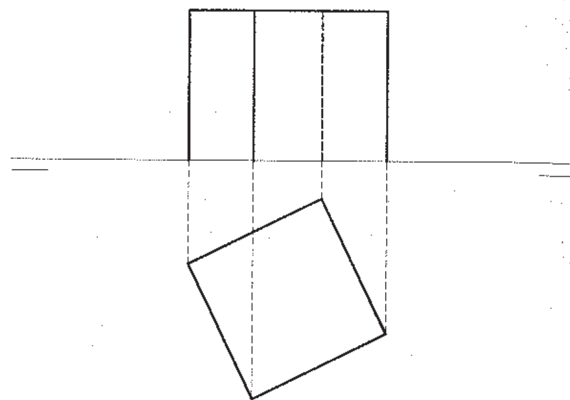
Para representar el tetraedro con una arista vertical, se empieza por la proyección horizontal. La arista vertical se proyecta en un punto y su arista opuesta, como está horizontal, se proyecta en el PH en verdadera magnitud. La distancia del vértice A_1 a la arista horizontal está en la sección principal: es d.



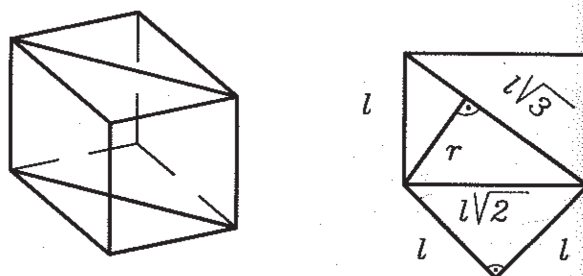
Una vez dibujado la proyección horizontal, se halla la proyección vertical, en la cual la arista vertical está en verdadera magnitud y la horizontal a una altura igual a la mitad del lado.

5. HEXAEDRO O CUBO

Es el poliedro regular formado por seis cuadrados. Dibujarlo con una cara apoyada en el PH es muy sencillo, ya que se puede dibujar su proyección horizontal pues está en verdadera magnitud. También se pueden dibujar las aristas verticales, que están en verdadera magnitud en proyección vertical y miden la longitud del lado.

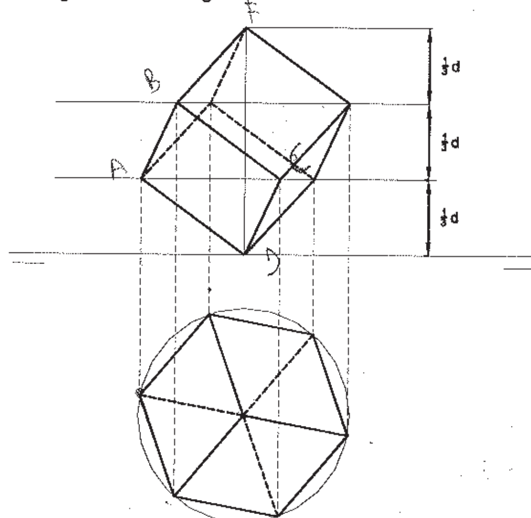


Si queremos dibujarlo apoyado en un vértice y además con una diagonal vertical, lo primero será determinar la longitud de la diagonal, que está en la sección principal y mide $l\sqrt{3}$.



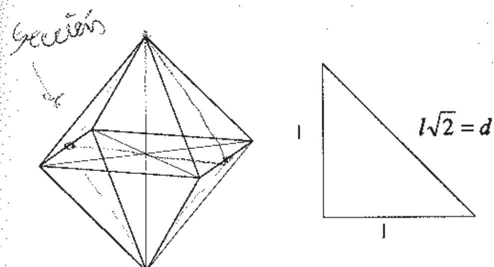
Sección principal del cubo

En dicha posición, la proyección horizontal del cubo forma un hexágono de radio r (que está en la sección principal), y las proyecciones verticales de los vértices intermedios están a 1/3 de la longitud de la diagonal:

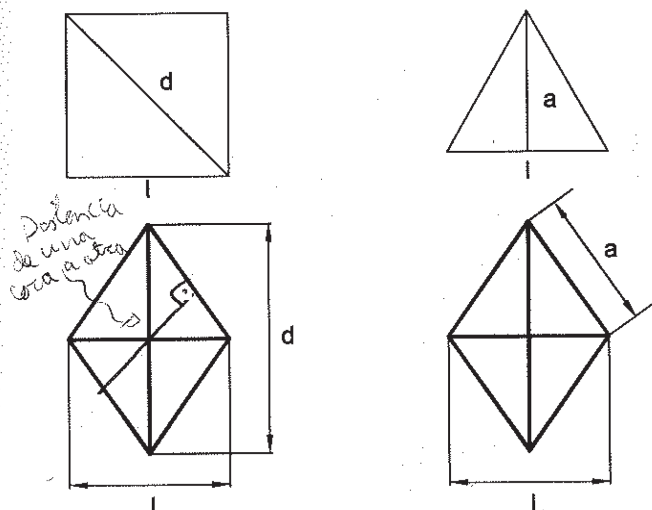


6. OCTAEDRO

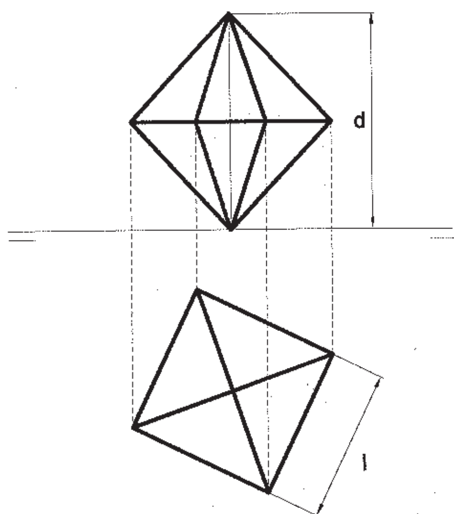
Es el poliedro regular de ocho caras, que son triángulos equiláteros. Se observa que si l es el lado, hay tres diagonales iguales que miden $d = l\sqrt{2}$.



La sección principal es un rombo que se puede dibujar a partir de sus diagonales ($\sqrt{2} \cdot l$ y l) o a partir de una diagonal y los lados.

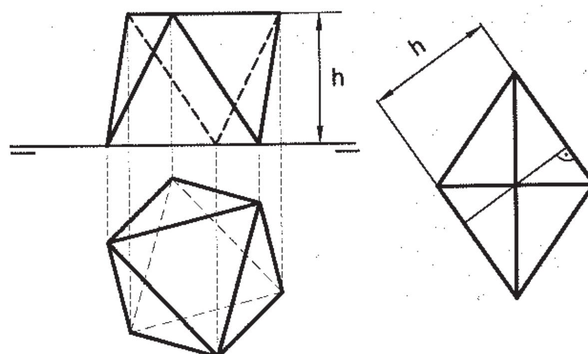


Para representar el octaedro apoyado en un vértice y además con una diagonal vertical, se dibuja la proyección horizontal, que es un cuadrado de lado l. La altura total es la diagonal, y los vértices laterales tienen de cota la mitad de la diagonal.



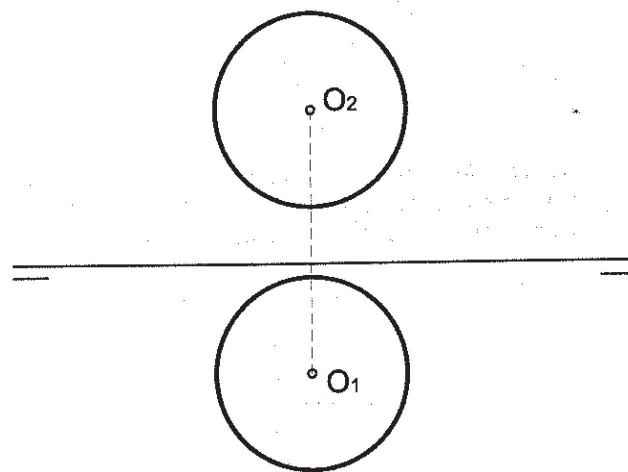
Si queremos dibujarlo con una cara apoyada en el PH, se tiene en cuenta que la proyección horizontal de esa cara y su opuesta son dos triángulos equiláteros girados 180°.

Para hallar la cota de la cara superior, se dibuja la sección principal del octaedro. La cota buscada es la distancia h entre dos lados de ese rombo.



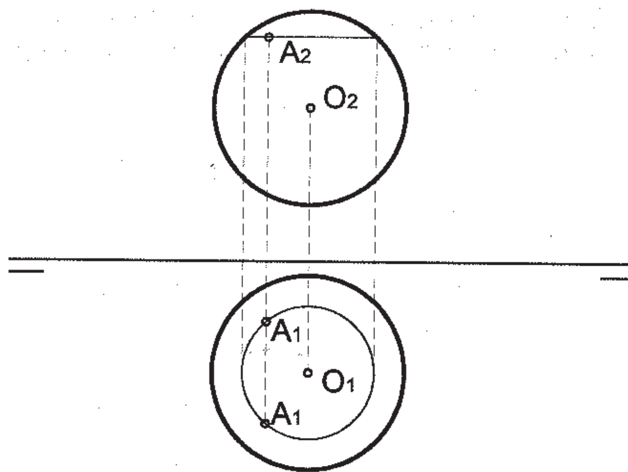
7. LA ESFERA

Una esfera de radio R tiene como proyecciones dos circunferencias de radio R, con centros en las dos proyecciones O_1 y O_2 del centro de la esfera.

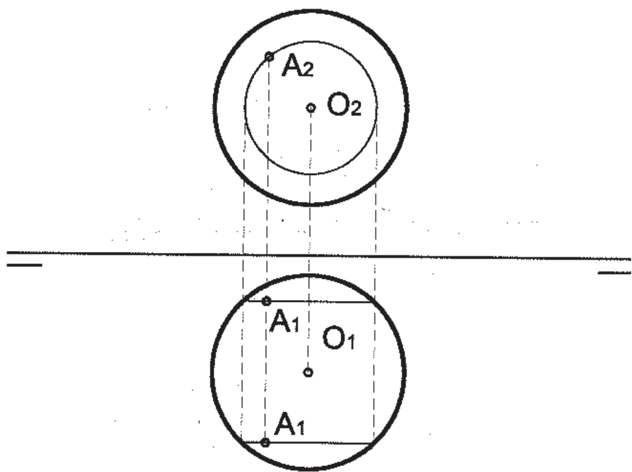


Por cualquier punto de la esfera se puede trazar una circunferencia horizontal de radio $r_1 \leq R$. Su proyección vertical será un segmento, y su proyección horizontal será una circunferencia de radio r_1 y centro O_1.

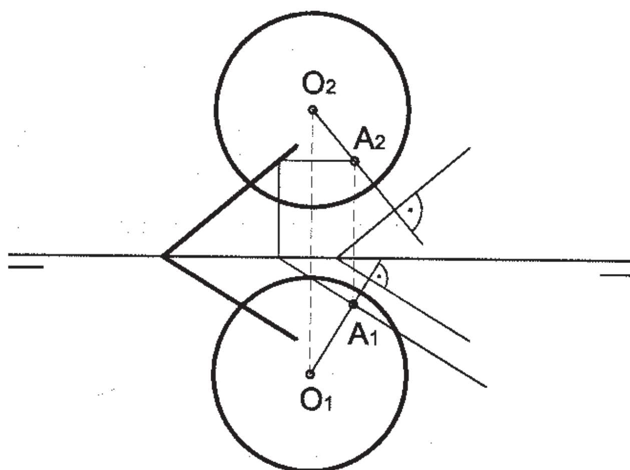
Esto nos sirve para situar puntos sobre la esfera. Si nos dan A_2, cortamos la esfera por un plano horizontal que pase por A, lo que nos da una circunferencia, cuyo diámetro se determina en la proyección vertical. A_1 estará en la proyección horizontal de esa circunferencia (hay dos soluciones).



De forma similar se podría trazar otra de radio $r_2 \leq R$ que esté contenida en un plano paralelo al PV. Su proyección horizontal será un segmento, y su proyección vertical será una circunferencia de radio r_2.



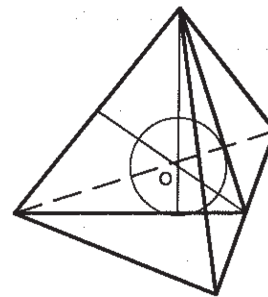
Por otra parte, el plano tangente a la esfera en un punto A es un plano perpendicular a la recta OA.

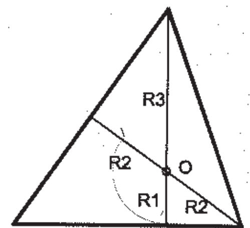


8. ESFERAS Y POLIEDROS REGULARES

Por cada poliedro regular hay tres esferas características: la inscrita que es tangente a las caras del poliedro, la inscrita que es tangente a las aristas, y la circunscrita que pasa por los vértices.

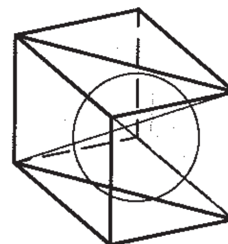
El centro de las tres esferas es el mismo: el centro del poliedro y los radios, cómo no, se obtienen en las secciones principales de cada poliedro, como se refleja en los siguientes dibujos:

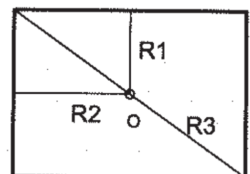




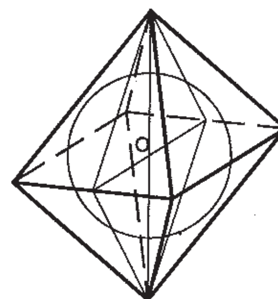
TETRAEDRO
RADIO DE LAS ESFERAS
R1= inscrita en caras
R2= inscrita en aristas
R3= circunscrita en vértices

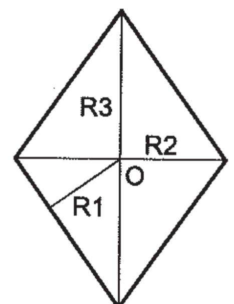
* Homotecia





CUBO
RADIO DE LAS ESFERAS
R1= inscrita en caras
R2= inscrita en aristas
R3= circunscrita en vértices



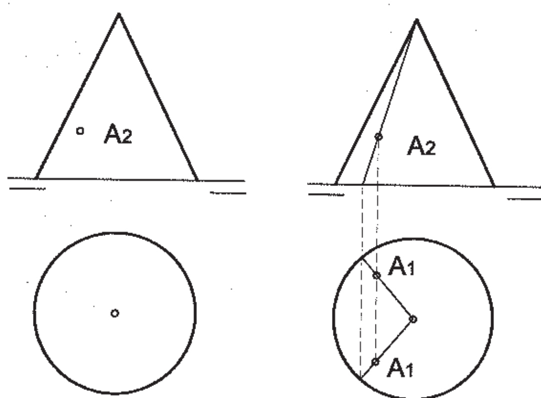


OCTAEDRO
RADIO DE LAS ESFERAS
R1= inscrita en caras
R2= inscrita en aristas
R3= circunscrita en vértices

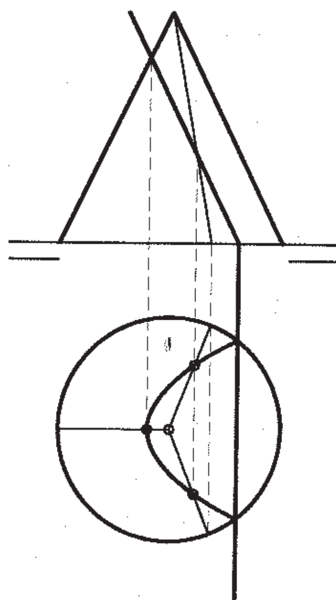
9. SUPERFICIES CÓNICA Y CILÍNDRICA

Es la superficie engendrada por una recta (generatriz) que gira apoyándose en un punto (el vértice del cono) y en una curva llamada directriz, normalmente una circunferencia. Si la directriz fuese otra curva, debe indicarse, por ejemplo como cono de directriz elíptica, etc.

Para trabajar en diédrica con puntos del cono, hay que tener en cuenta que siempre existe una generatriz del cono que pasa por esos puntos. De esta forma, si tenemos en diédrica una proyección de un punto, se puede determinar la otra proyección dibujando la generatriz.



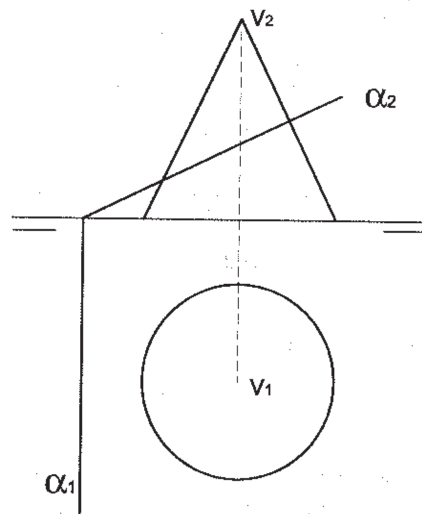
El corte de un plano con el cono es una curva cónica. Si el plano es perpendicular al eje del cono, será una circunferencia, si no lo es y corta a todas las generatrices, será una elipse. Si es paralelo al eje, se obtiene una hipérbola, y si es paralelo a una generatriz, una parábola. Se pueden obtener puntos de la curva cortando generatrices con el plano. Las proyecciones de los ejes de la cónica son paralelas o perpendiculares a las trazas del plano.



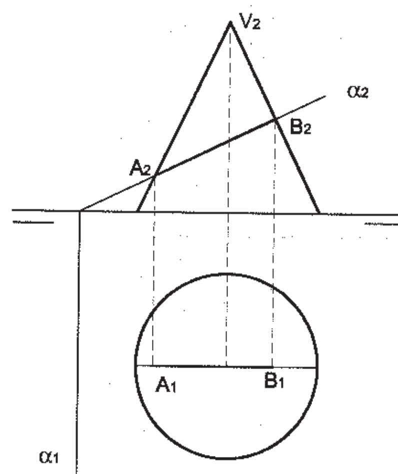
El cilindro es un caso particular del cono, con el vértice en el infinito. Las secciones horizontales son siempre paralelas a la base, y las generatrices son paralelas entre sí.

EJERCICIO RESUELTO 1

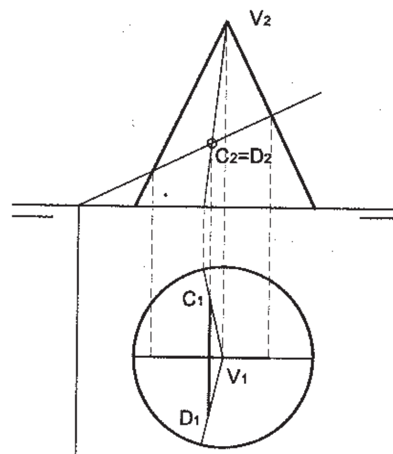
Determinar, por sus ejes principales, la sección que el plano proyectante α produce en el cono de revolución representado.



La sección será una elipse. Un eje AB se determina bien en la proyección vertical:



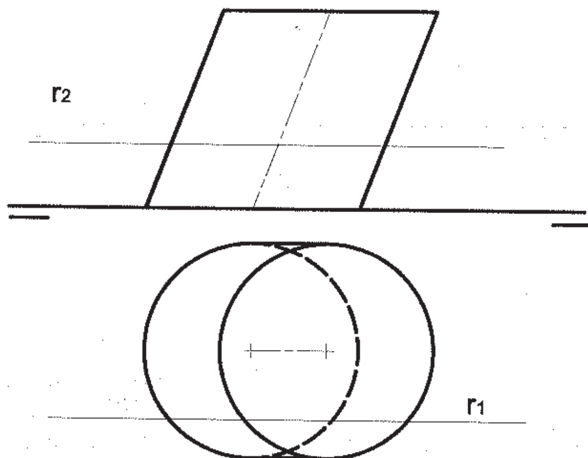
El otro eje CD será horizontal, perpendicular al primero, pasará por su punto medio y será paralelo a la traza α_1. Para determinar sus extremos, trazamos en la proyeción vertical las generatrices que pasan por esos extremos, las dibujamos en la proyección horizontal y allí determinamos dónde cortan al cono.



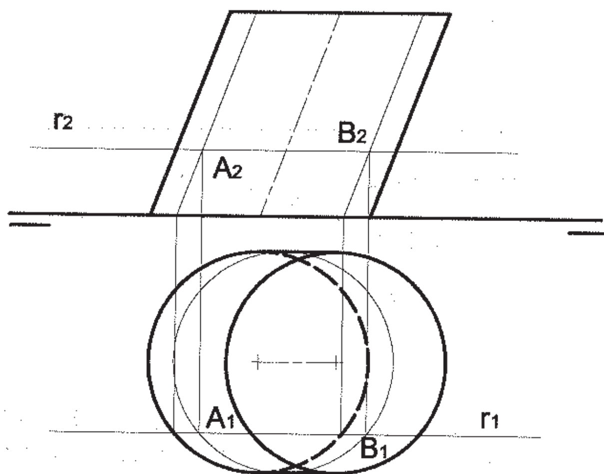
Observese que el centro de la elipse no coincide con V_1.

EJERCICIO RESUELTO 2

Determinar lospuntos de intersección de la recta r y el cilindro oblícuo dado.

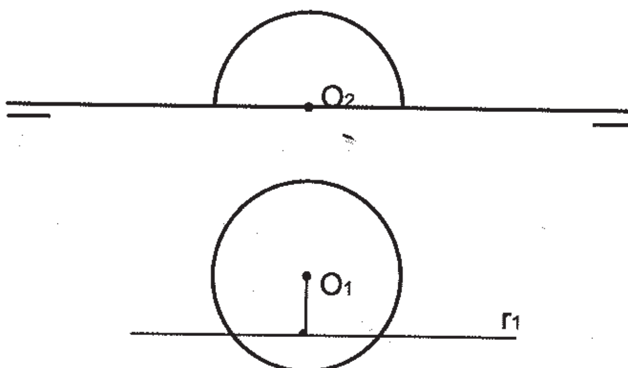


Basta con hacer un corte por un plano que pase por r, ya horizontal (dará dos rectas) o vertical (dará una circunferencia).

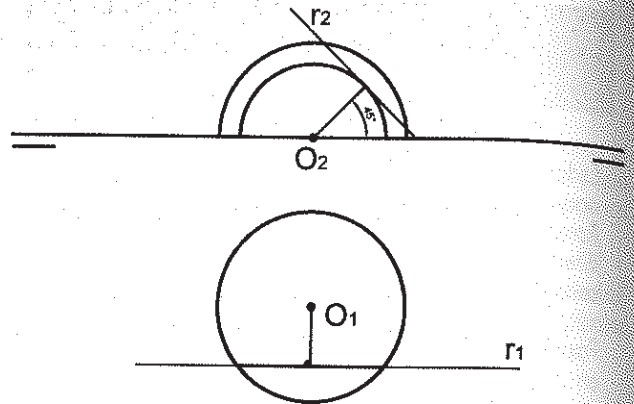


EJERCICIO RESUELTO 3

Determinar la proyección vertical de una recta r que forme 45° con el plano horizontal y que sea tangente a la semiesfera representada.

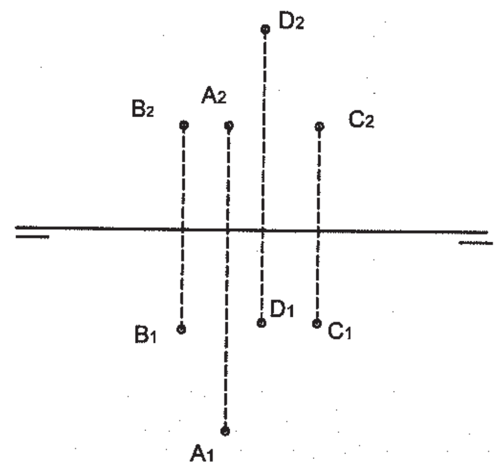


El corte de la semiesfera por un plano vertical que contenga a r es una circunferencia. La dibujamos, y r_2 será tangente a ella y formando 45° con la LT.



EJERCICIO RESUELTO 4

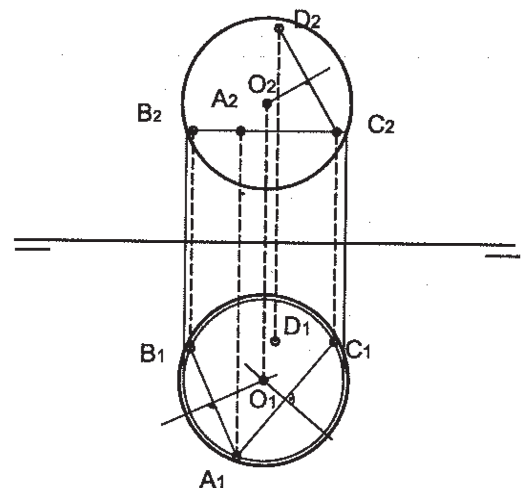
Dibujar la esfera que pasa por los puntos A, B, C y D. Obsérvese que los puntos A, B y C están sobre un plano horizontal y que los puntos C y D poseen el mismo alejamiento.



Los puntos ABC están en una circunferencia horizontal. Su centro nos dará O_1.

Como CD es frontal, su proyección vertical está en verdadera magnitud, y O_2 estará en la mediatriz de C_2 D_2.

Para dibujar la esfera, podríamos calcular el radio, que es la distancia entre el punto O y A, B ó C, pero es más sencillo dibujar la proyección vertical de la circunferencia ABC, que es un segmento horizontal por cuyos extremos pasará la proyección vertical de la esfera, que tiene centro en O_2. La proyección horizontal de la esfera es una circunferencia igual pero con centro O_1.

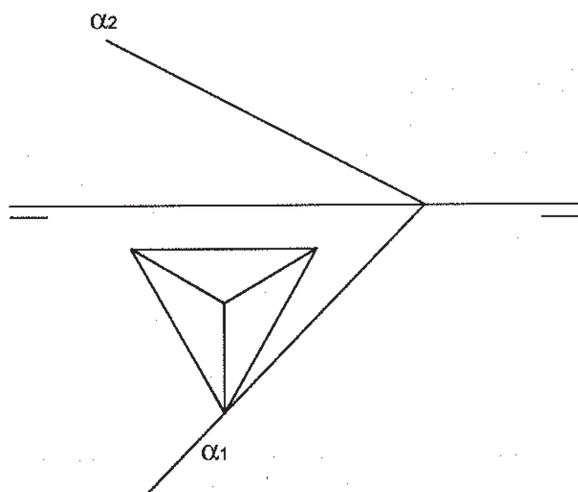


EJERCICIOS PROPUESTOS

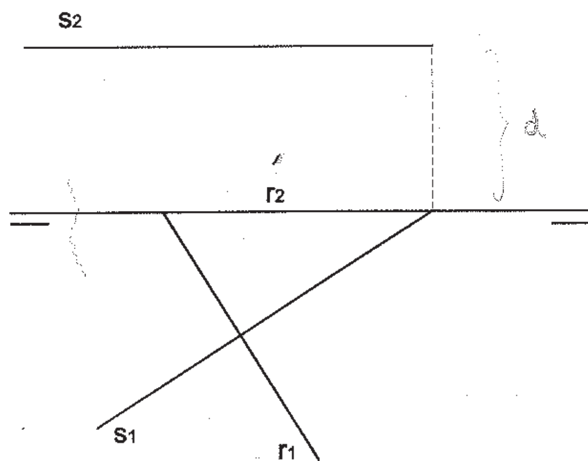
1. Dibújese en perspectiva libre un poliedro de 6 caras y 5 vértices. ¿Cuántas aristas tiene?

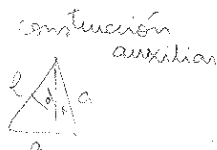
2. Determinar el ángulo que forman dos caras cualesquiera de un tetraedro regular.

3. Dado la proyección horizontal de un tetraedro regular y un plano α que lo corta, hallar las proyecciones de la sección.

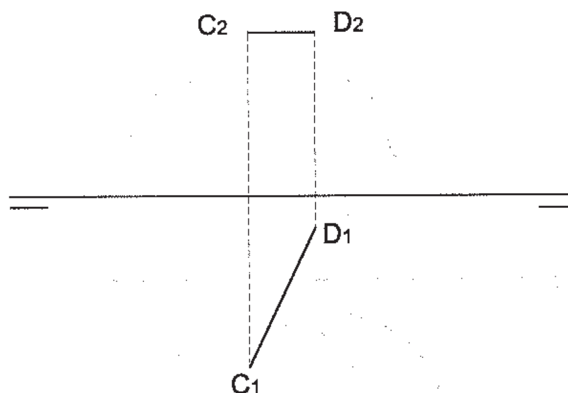


4. Un tetraedro regular ABCD tiene la arista AB contenida en la recta r y la arista opuesta CD contenida en la recta s, siendo ambas rectas horizontales y ortogonales entre sí. Dibujar las proyecciones del tetraedro.

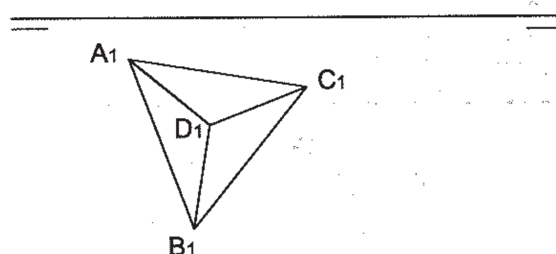




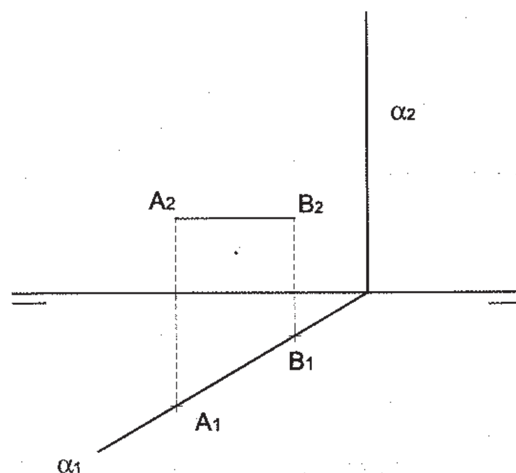
5. Hallar las proyecciones diédricas de un tetraedro regular de arista CD, sabiendo que los vértices C y D son los de mayor cota de tetraedro y que la arista AB es horizontal.



6. Un tetraedro regular se encuentra apoyado en el plano horizontal de proyección sobre su cara ABC. Hallar la proyección vertical del tetraedro y su intersección con el plano definido por los puntos medios de las aristas AB, CD y AD.



7. Dibujar las proyecciones de un tetraedro regular ABCD del que se conoce la situación de la arista AB. Se sabe además que la cara ABC está contenida totalmente en el plano α, con el vértice C de mayor cota que los A y B. De las soluciones posibles, elegir aquella en la que el vértice D quede lo más alejado posible del plano vertical.



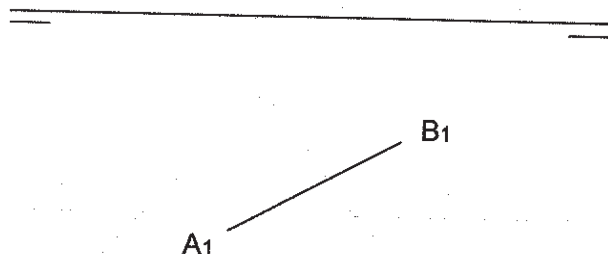
construcción auxiliar

cuidado con las discontinuas

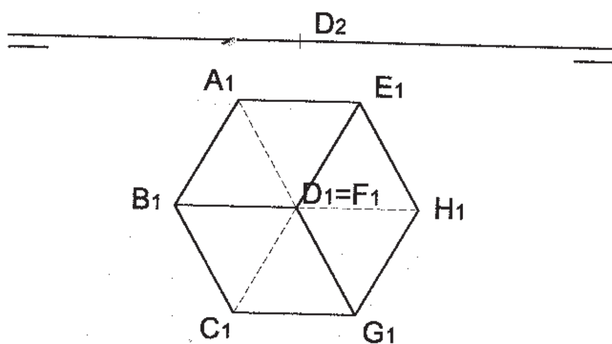
8. Representar en diédrica un cubo de lado 3 cm apoyado primero en una cara, después en una arista y finalmente en un vértice.

9. El punto A(2, 4, 0) es el vértice inferior de un cubo de lado 3 cm con una diagonal vertical. Dibujarlo en diédrica sabiendo que uno de sus vértices tiene de coordenada x = 0.

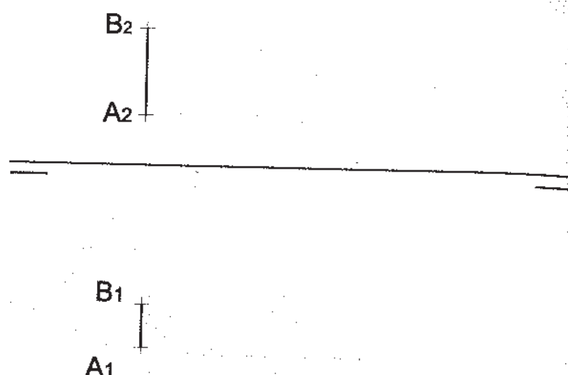
10. Un cubo se apoya en el plano horizontal de proyección sobre una arista AB del mismo, teniendo además paralela a dicho plano una de sus secciones principales. Conociendo la proyección horizontal A_1B_1 de la arista de apoyo, completar las proyecciones del cubo.



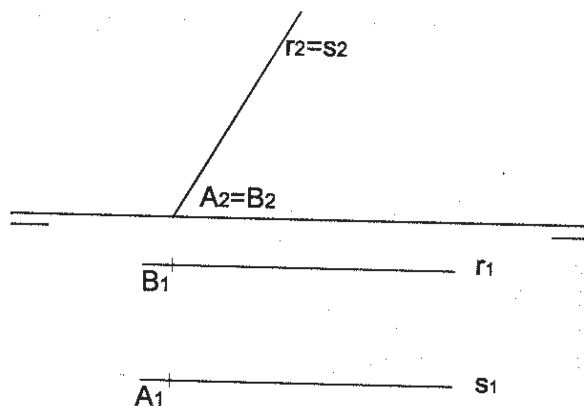
11. Sabiendo que la figura adjunta representa la proyección horizontal de un cubo con una diagonal vertical, dibujar su proyección vertical, distinguiendo partes vistas y ocultas.



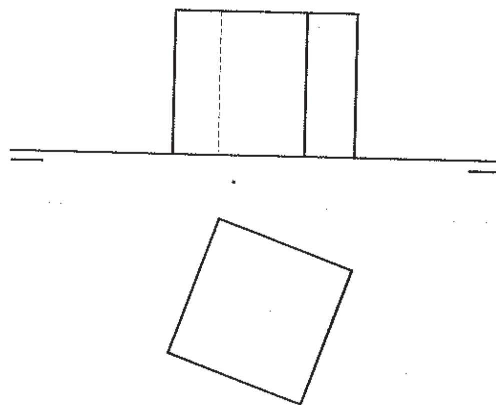
12. Dibujar las proyecciones horizontal y vertical de un cubo, cuya arista AB está contenida en una recta de perfil. El cubo debe quedar a la derecha del plano de perfil que contiene a la arista AB y el vértice A debe ser el de menor cota del mismo.



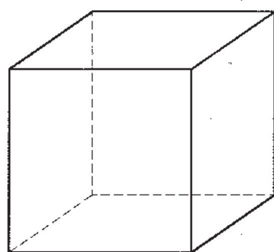
13. El segmento AB es arista de un hexaedro regular y las rectas r y s son diagonales de las caras perpendiculares a la arista AB. Hallar las proyecciones del poliedro.



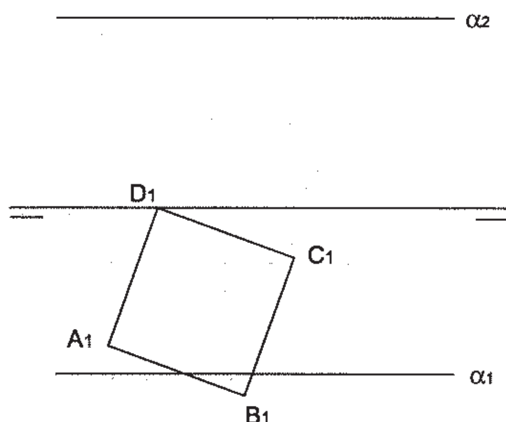
14. Dado el cubo de la figura, dibujar las proyecciones del octaedro que tiene por vértices los centros de las caras de dicho cubo. Interpretar correctamente las partes vistas y ocultas.



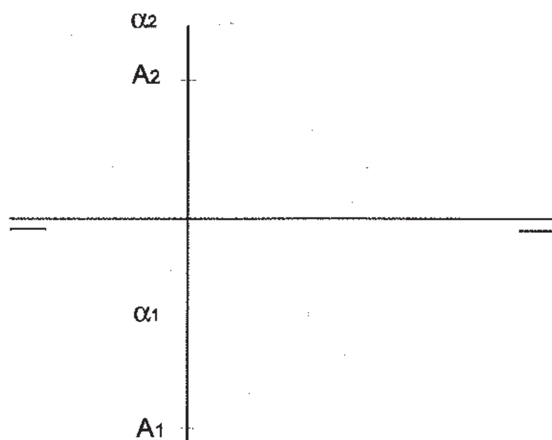
15. Dibujar sobre el cubo dado el poliedro resultante de unir los puntos medios de sus aristas. Interpretar correctamente las partes vistas y ocultas del sólido resultante. Indicar el número de aristas y el número de vértices, y dibujar el desarrollo de la superficie.



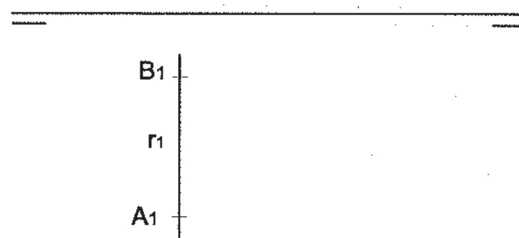
16. Hallar la verdadera magnitud de la sección que el plano α produce en el cubo que está apoyado en el plano horizontal de proyección mediante su cara ABCD.



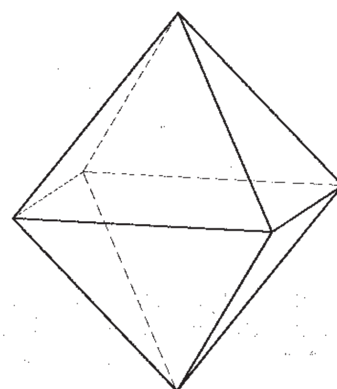
17. Dibujar las proyecciones de un cubo de arista 30 mm. del que se conoce que: 1°) tiene una cara contenida en el plano α, siendo A uno de sus vértices y estando todo el sólido situado a la derecha de α, 2°)otra de las caras que pasa por A forma 30° con el plano horizontal de proyección, 3°) el cubo está totalmente situado en el primer cuadrante.



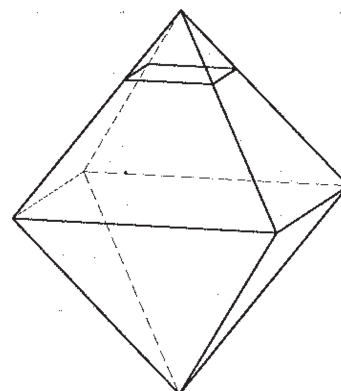
18. Dada la recta de punta r, dibujar las proyecciones de un cubo que tenga su arista AB contenida en r y la arista opuesta de una de las caras contiguas contenida en el plano horizontal de proyección. El cubo debe quedar a la derecha del plano de perfil que contiene a r.



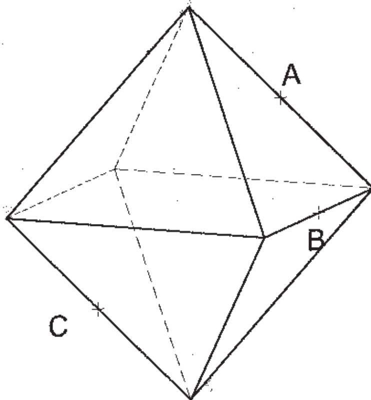
19. Dibujar el poliedro que resulte al unir los puntos medios de las aristas de ese octaedro. Dibujar el desarrollo del poliedro resultante a escala libre.



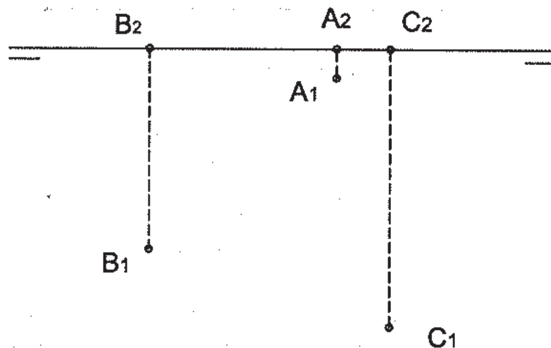
20. Dibujar el desarrollo del poliedro obtenido al seccionar el octaedro regular por planos a 1/3 de la arista. Basta trazar cuatro o cinco caras yuxtapuestas.



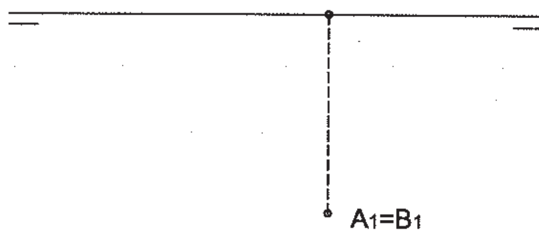
21. Completar la sección producida por el plano ABC en el octaedro regular representado, y visualizar las partes vistas y ocultas.



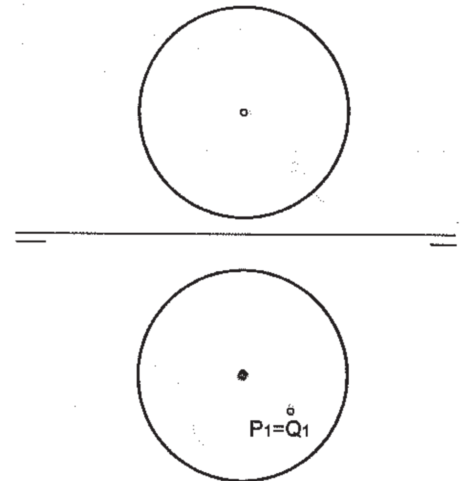
22. Dibujar las proyecciones de un octaedro regular que está apoyado sobre el plano horizontal de proyección sobre la cara ABC. Interpretar correctamente las aristas vistas y ocultas.



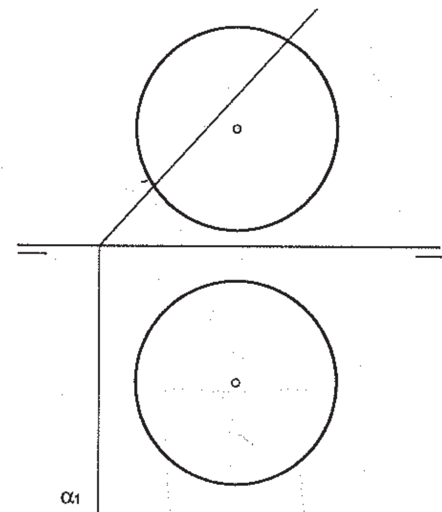
23. $A_1 = B_1$ es la proyección horizontal de la altura de un octaedro regular que tiene un vértice sobre el plano vertical y cuyas aristas horizontales forman 45° con dicho plano. Dibujar las proyecciones del octaedro.



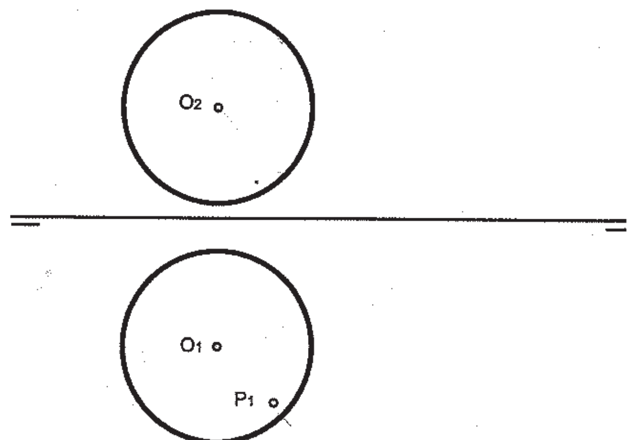
24. Dada la superficie esférica de la figura y las proyecciones horizontales $P_1 \equiv Q_1$ de dos puntos de la misma, hallar las proyecciones verticales de estos puntos sabiendo que P tiene mayor cota que Q.



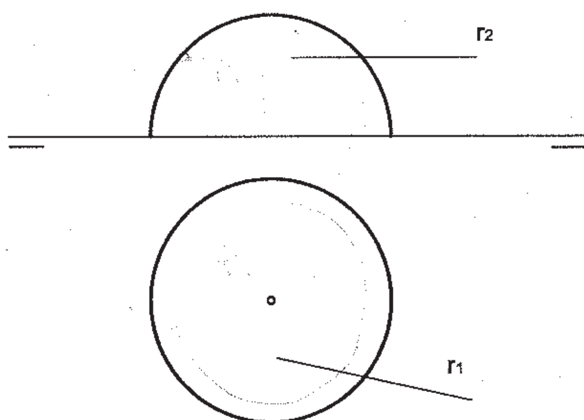
25. Dibujar los ejes de la elipse en que se proyecta horizontalmente la intersección del plano α con la esfera dada.



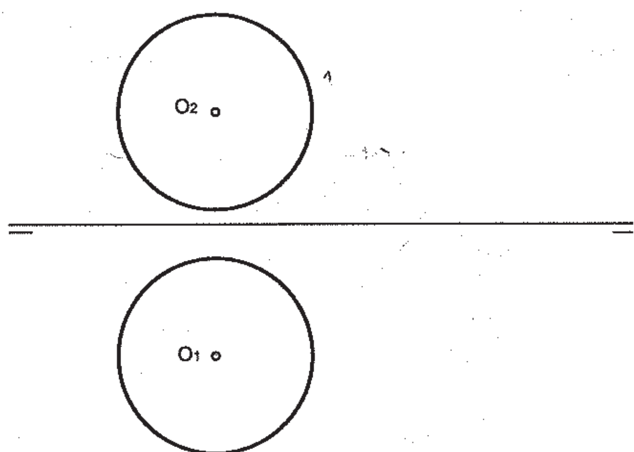
26. Hallar el plano tangente a la esfera dada en el punto P de la misma situado por debajo de su contorno aparente sobre el horizontal.



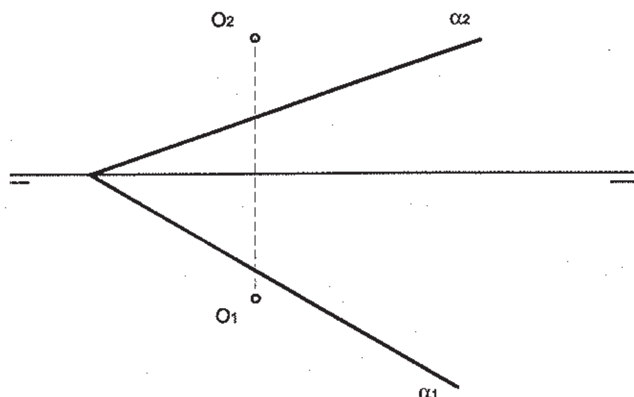
27. Hallar los puntos de intersección de la recta r con el cuerpo representado.



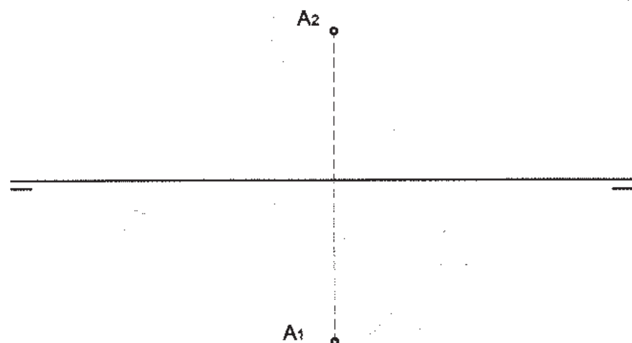
28. Dada la esfera de la figura, hallar los puntos de la misma cuyos planos tangentes son paralelos al primer bisector.



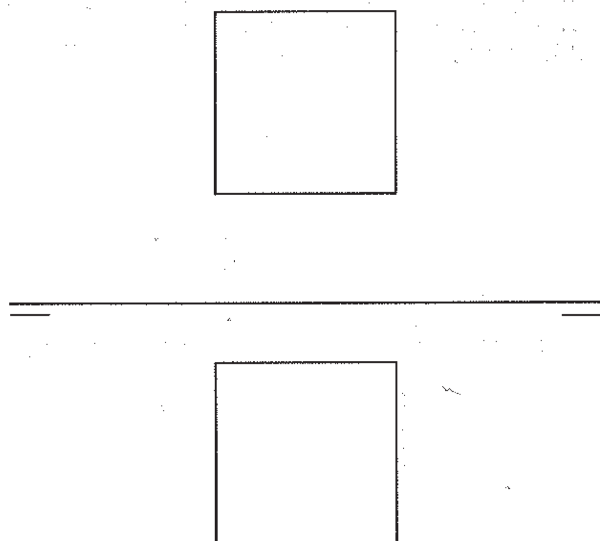
29. Trazar las proyecciones de la esfera de centro O que es tangente al plano α.



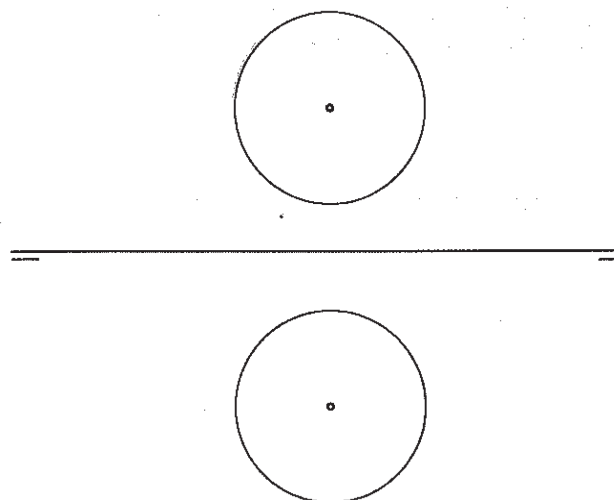
30. Hallar las proyecciones de los puntos que disten 20 mm. del plano vertical de proyección, 30 mm. del horizontal y 40 del punto A.



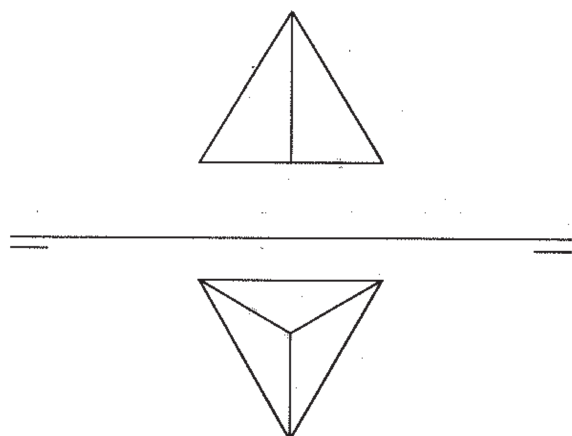
31. Dado el cubo, cuyas proyecciones diédricas son las de la figura, dibujar las proyecciones de su esfera circunscrita e inscrita.



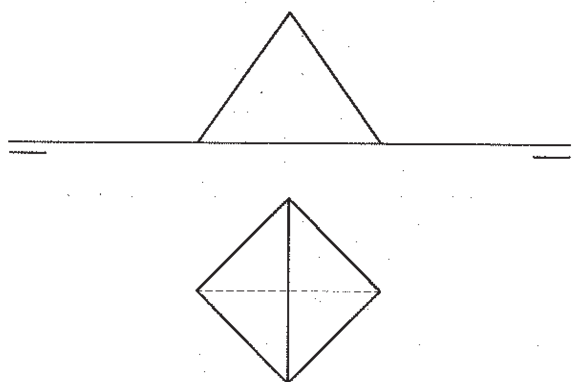
32. Dada la esfera de la figura, dibujar las proyecciones de un cubo cuyas aristas sean tangentes a la esfera y de modo que cuatro sean horizontales, cuatro verticales y otras cuatro paralelas a la línea de tierra.



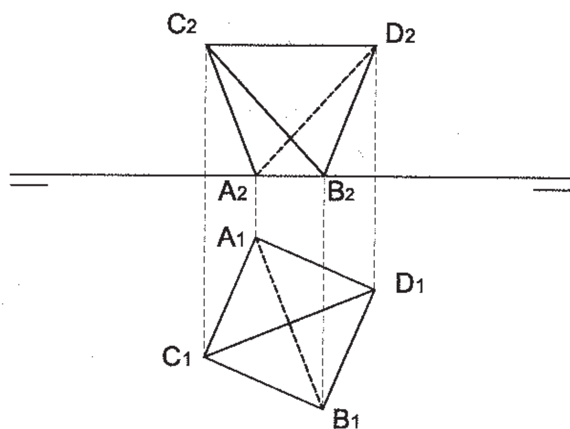
33. Hallar las proyecciones de la esfera circunscrita al tetraedro regular de la figura.



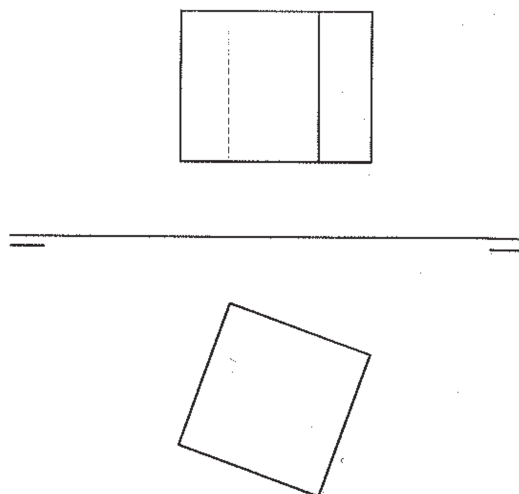
34. Dado el tetraedro regular de la figura, apoyado sobre una arista en el plano horizontal, dibujar los proyecciones de la esfera interior al mismo que es tangente a sus aristas.



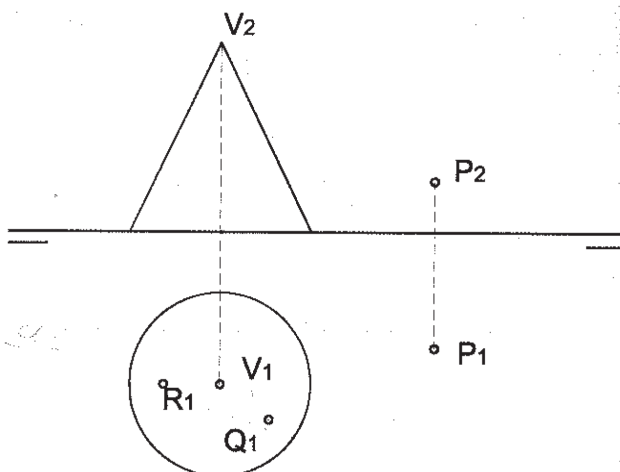
35. Dado el tetraedro regular de la figura, cuyas aristas AB y CD son horizontales, dibujar las proyecciones de una esfera que sea tangente a sus aristas.



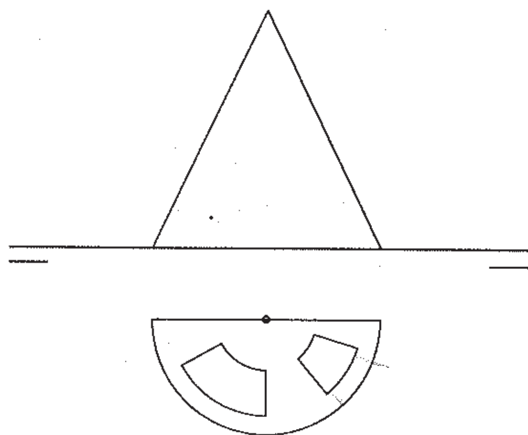
36. Dado el cubo de la figura, hallar las proyecciones de la esfera que sea tangente a sus aristas.



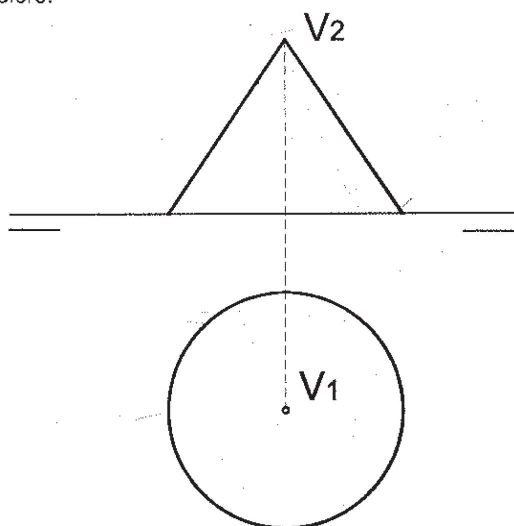
37. Hallar las trazas del plano que pasa por el punto P y que es paralelo a las generatrices del cono que pasan por Q y R.



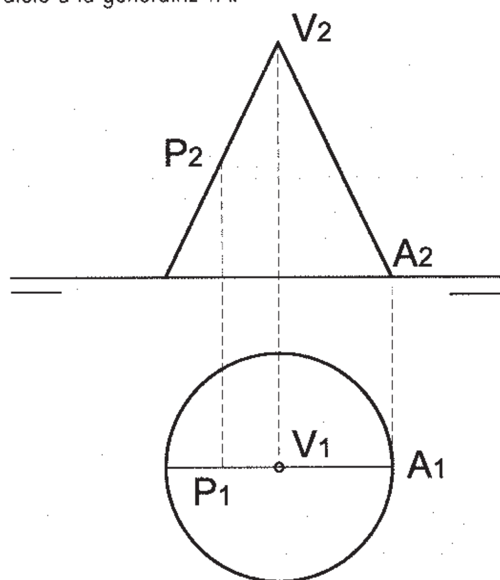
38. Dibujar la proyección vertical de los zonas de la superficie cónica marcados en la proyección horizontal.



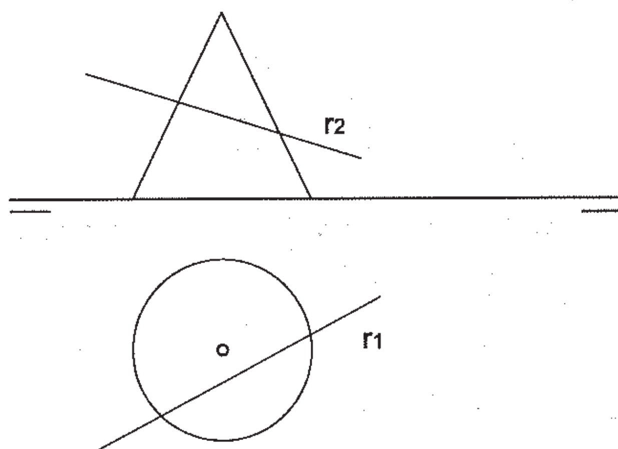
39. Dado el cono de revolución de la figura, dibujar las trazas de los planos de canto que pasan por su vértice y que producen en el mismo una sección que es un triángulo equilátero.



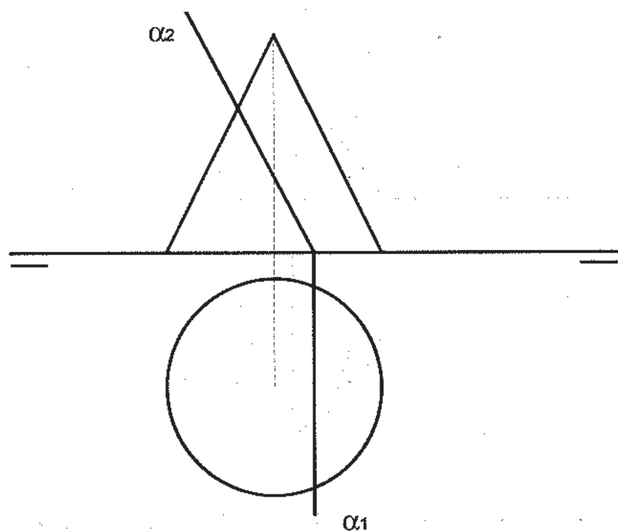
40. Determinar, en ambas proyecciones, la cónica que produce el plano proyectante sobre el vertical que pasa por P y es paralelo a la generatriz VA.



41. Determinar la intersección entre la recta r y el cono representado.

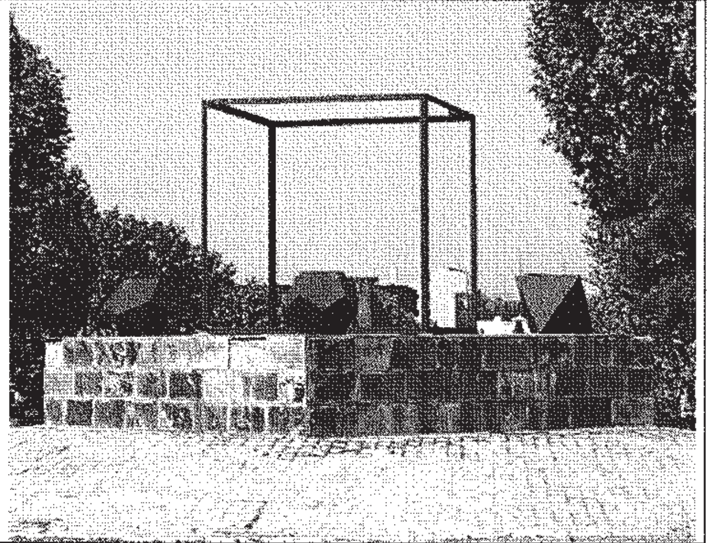


42. Dibujar la sección del cono por el plano indicado.



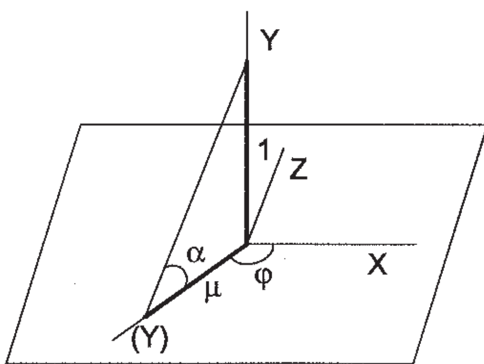
TEMA 14

PERSPECTIVA CABALLERA



1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

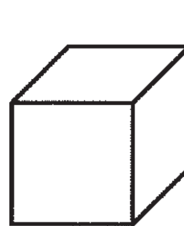
Perspectiva caballera es el sistema de representación que se obtiene al proyectar el espacio de forma cilíndrica y oblicua sobre un plano coordenado XZ.



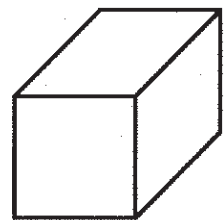
Los ejes x y z están en verdadera magnitud por estar en el plano de proyección, mientras que el eje **y** queda proyectado. Dependiendo del valor del ángulo de proyección α, las medidas reales en el eje y se acortarán o alargarán al pasar al eje proyectado (y). Si cogemos en el eje y un segmento de longitud unidad, se proyecta en un segmento de longitud μ, de tal forma que:

$$tg\alpha = \frac{1}{\mu} \quad , \text{ por tanto } \quad \mu = cot\,g\alpha$$

Al valor de μ (valor que adquiere en el eje y la unidad) se le llama *coeficiente de reducción*. Puede ser mayor o menor que 1. Si es mayor que 1, las figuras salen deformados.

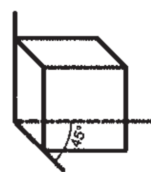


$\mu<1$

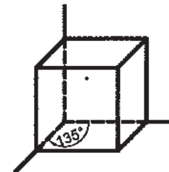


$\mu>1$

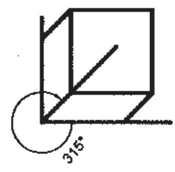
Otro dato que hay que definir es la posición del eje y respecto a los ejes x y z. Queda definida por el ángulo φ.



φ = 45°



φ = 135°



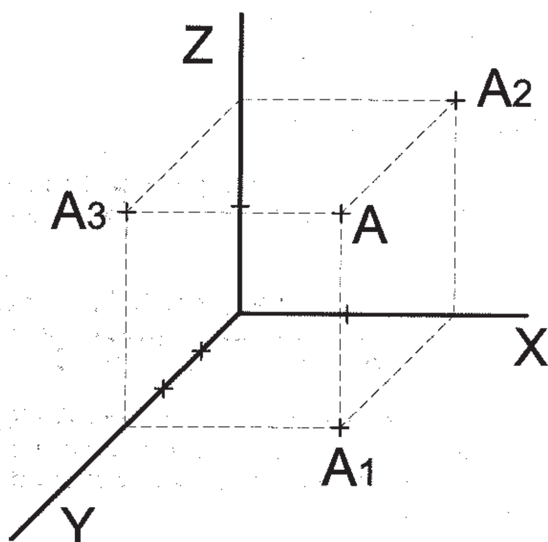
φ = 315°

Otros elementos son los tres planos coordenados, de los que sólo el plano XZ está en verdadera magnitud y se le llama *plano del cuadro*.

2. REPRESENTACIÓN DEL PUNTO

Un punto se suele dar por sus coordenadas (x, y, z). La coordenada y hay que multiplicarla por el coeficiente de reducción μ cuando se lleva al dibujo. Con ellas se forma un paralelepípedo cuyos otros vértices son las proyecciones del punto. Al vértice más lejano al origen se le llama *proyección directa* del punto.

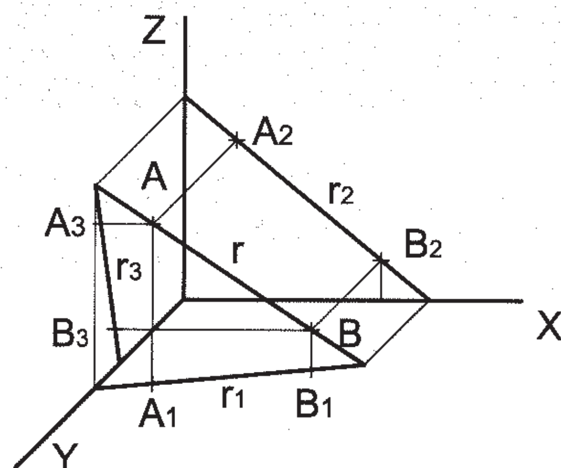
EJERCICIO RESUELTO 1
Dibujar en caballera el punto A, de coordenados (2, 3, 2) cm. Datos: $\mu = 0'5$; $\varphi = 135°$



Aunque están relacionadas, no deben confundirse las coordenadas de un punto con sus proyecciones. De hecho, con dos proyecciones queda definido el punto, mientras que con dos coordenadas no.

3. REPRESENTACIÓN DE LA RECTA

Dados dos puntos A y B, la recta definida por ellos tiene como proyección directa r la recta que une las proyecciones directas de los puntos, y como proyecciones r_1, r_2 y r_3 las que unen las proyecciones de los puntos.



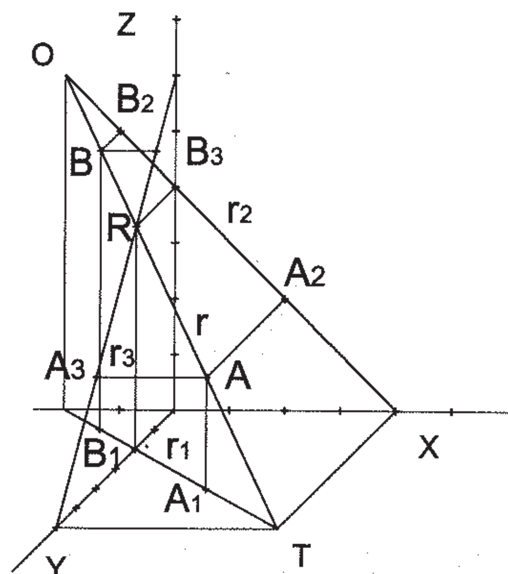
Trazas de una recta

Se llaman trazas de una recta los puntos donde la recta corta a los planos coordenadas. Serán los puntos de corte de r con r_1, r con r_2, y r con r_3 . También se pueden hallar prolongando hasta que corte al eje X o al Y, y subir o bajar verticalmente po el plano coordenada hasta que corte a r.

Evidentemente las tres trazas están en los planos coordenados por lo que siempre tienen al menos una coordenada de valo cero.

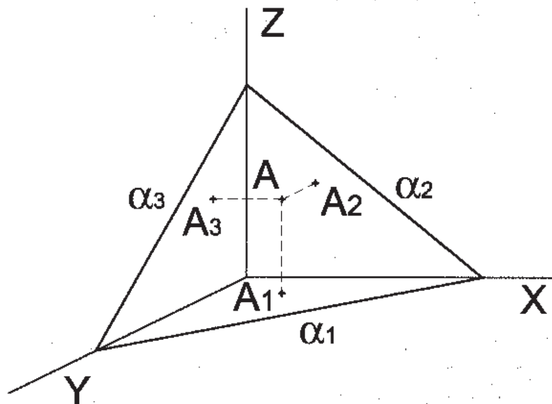
EJERCICIO RESUELTO 2
Hallar las proyecciones de la recta AB y las coordenadas de los trazas. Datos: A(2, 4, 2), B(-1, 1, 5), $\mu = 0.5$; $\varphi = 135°$

Solución: 0 (-2,0, 6); R (0, 2, 4); T (4,6,0)

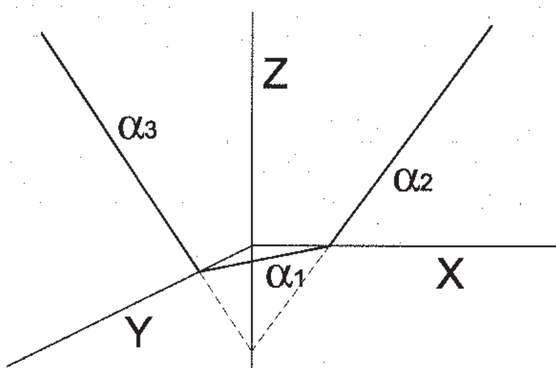


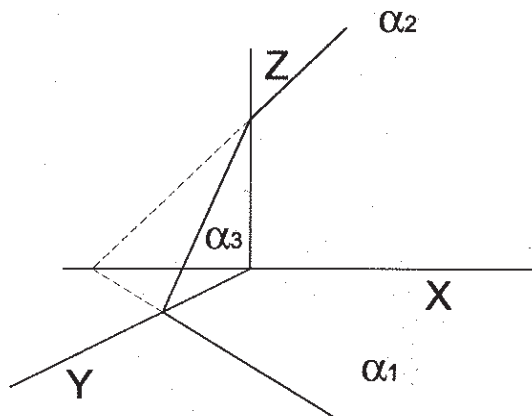
4. REPRESENTACIÓN DEL PLANO

Un plano se representa por sus trazas, que son los cortes con los planos coordenados. Como es la intersección entre dos planos, las trazas son rectas que se suelen nombrar por α_1, α_2 y α_3. Las tres trazas se cortan en los ejes formando el llamado *triángulo de trazas*.



Las trazas se pueden cortar en la parte negativa de los ejes:

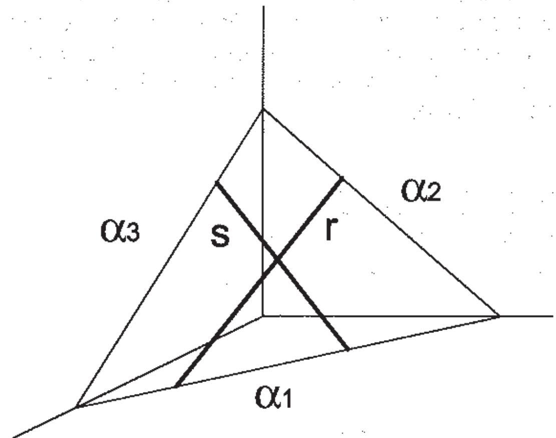




Como se observa en la figura, un punto cualquiera A del plano tiene sus proyecciones normalmente fuera de la trazas del plano.

Toda recta contenida en un plano tiene sus trazas en las trazas del plano, ya que éstas son el conjunto de puntos comunes al plano y al plano coordenado.

Si nos dan dos rectas que se cortan (r y s), para dibujar el plano definido por ellas se hallan sus trazas y se unen. Para hallar las trazas del plano que pasa por tres puntos no alineados, se unen los puntos de dos en dos para obtener dos rectas que se cortan y que pertenecen al plano, con lo que estamos en el caso anterior.



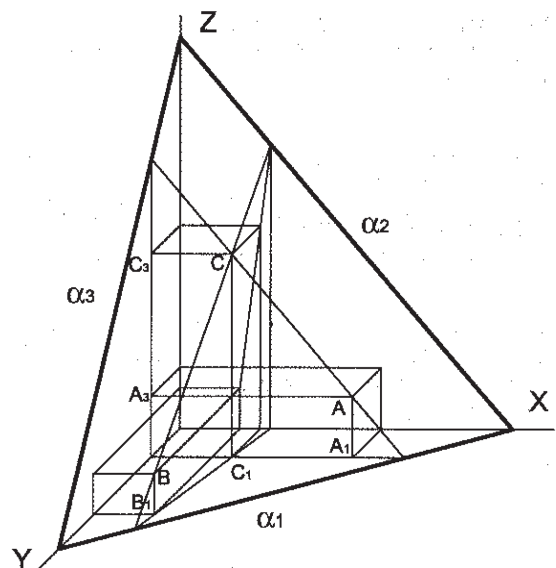
EJERCICIO RESUELTO 3

Dibujar el plano que pasa por los puntos siguientes: A (5, 2, 1'5), B (1'5, 6, 1) y C (2, 2, 5), en una caballera de μ = 0'5 y φ= 135 °.

Se dibujan en caballera los tres puntos A, B y C. Se coge la recta AC y se halla su traza horizontal, que será la intersección de AC con A_1C_1. Se hace lo mismo con la recta BC.

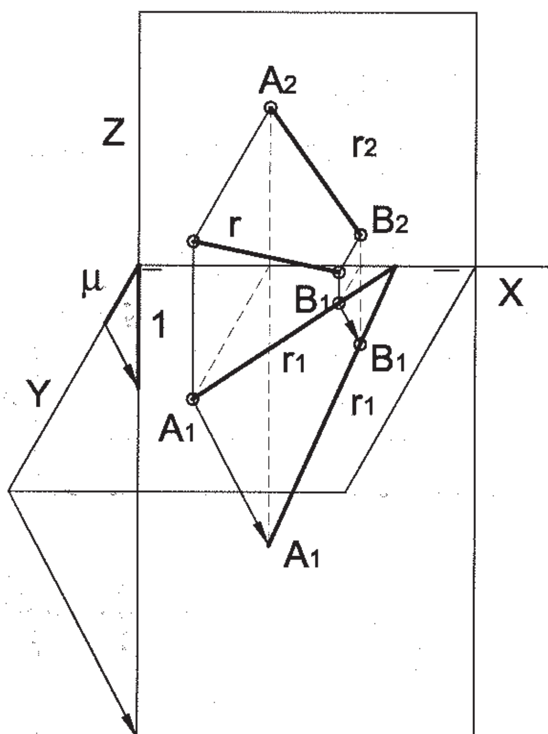
Se unen las dos trazas horizontales de los rectas AB y BC, y nos da α_1, que se prolonga hasta cortar con los ejes X e Y. Por estos puntos de corte pasarán α_2 y α_3,respectivamente, para formar el triángulo de trazas.

Se halla una traza vertical de la recta AC, que será la intersección de AB con A_3B_3. Por ese punto pasará α_3 que se puede ya dibujar. Por último, α_2 se dibuja completando el triángulo de trazas.



5. RELACIÓN CON EL SISTEMA DIÉDRICO

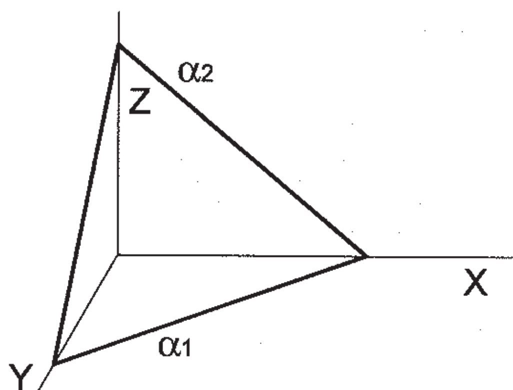
Es fácil pasar de una perspectiva caballera al sistema diédrico. La proyección directa desaparece, y sólo quedan las proyecciones sobre los planos coordenados. Si tomamos la lT en el eje X, el plano XZ coincide con el PV, y está en verdadera magnitud. El plano XY hay que abatirlo sobre el anterior. Un segmento unitario en el eje Y, que mide μ en el eje de caballera, se transforma en un segmento de magnitud 1 en diédrica. Así se establece una afinidad entre las proyecciones horizontales, con eje en el eje X.



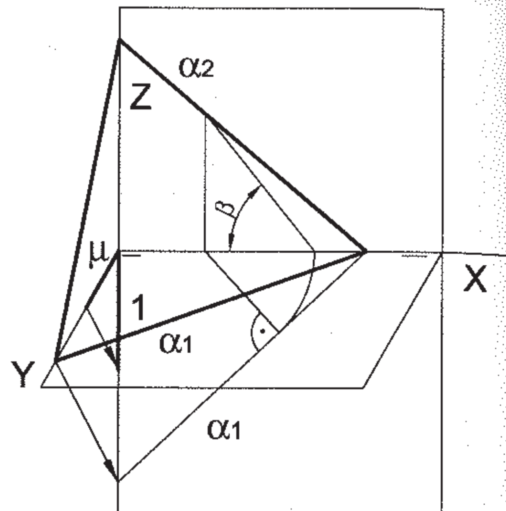
Así podemos resolver problemas de ángulos, verdaderas magnitudes de segmentos, distancias, etc.

EJERCICIO RESUELTO 4

Hallar el ángulo que el plano α forma con el plano XY.



Se pasa a diédrica el plano α, tomando el eje X como LT, y se halla el ángulo β que forma una recta de máxima pendiente con el plano horizontal XY.



6. REPRESENTACIÓN DE CUERPOS

La perspectiva caballero se usa con frecuencia para representar cuerpos sólidos a partir de varias vistas: alzado, planta superior, perfil, etc.

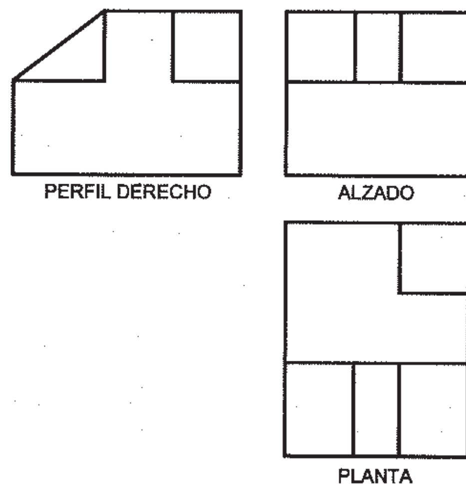
El alzado suele ser la vista del objeto paralela al plano XZ, el perfil es la vista paralela al plano YZ y la planta es paralela al plano XY.

Se puede empezar dibujando un paralelepípedo de dimensiones iguales a las de las vistas, e ir modificando lo necesario para que corresponda a los vistas dadas.

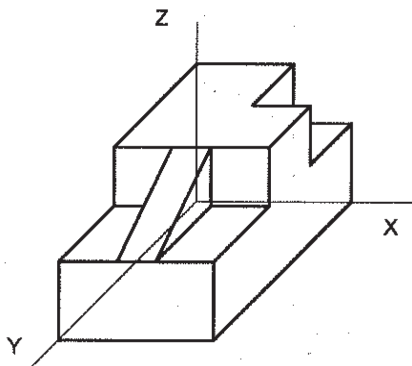
Hay que tener en cuenta que los medidas de aristas paralelas al eje Y deben ser multiplicadas por el coeficiente de reducción μ al ser dibujadas en caballera.

EJERCICIO RESUELTO 5

Dibujar en caballera la pieza cuyas vistas se dan. $\mu = 1$, $\varphi = 135°$.



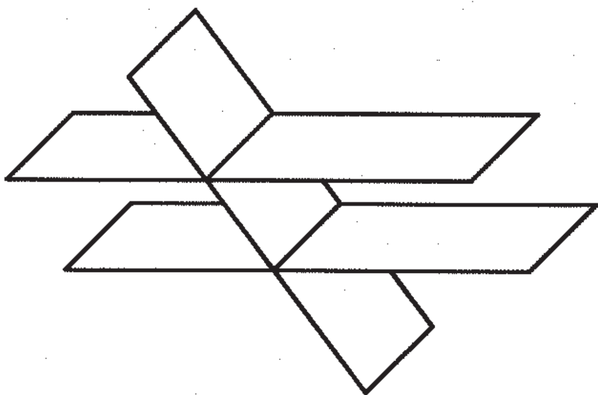
Situamos el alzado paralelo al plano XZ. Así se ven en la perspectiva caballera las tres vistas dadas.



7. CORTES DE CUERPOS CON UN PLANO

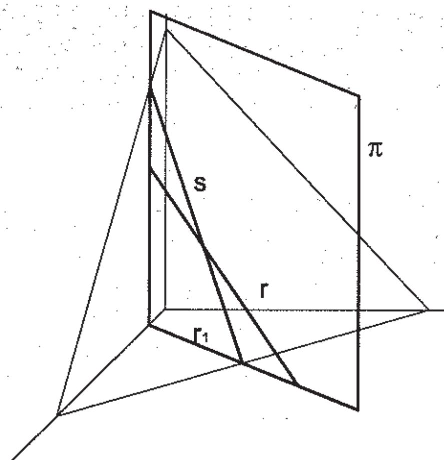
Se trata de hallar la figura poligonal que resulta al seccionar un objeto por un plano dado. Para ver mejor el corte, se suele suprimir la parte del objeto que queda por encima del plano de corte.

Para hallar el corte se debe tener en cuenta que dos planos paralelos cortados por un tercero dan rectas paralelas.



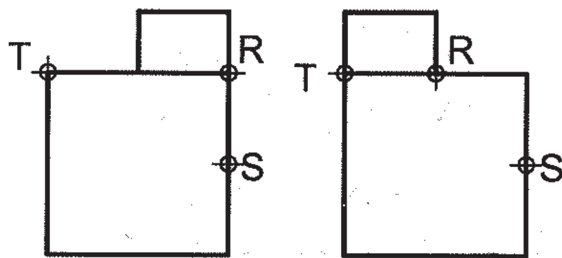
Por eso, el corte en caras paralelas a los planos coordenados son segmentos paralelos a la traza en ese plano coordenado. Y si alguna cara está en un plano coordenado, el corte en esa cara será la misma traza. Si el cuerpo tiene planos inclinados, se puede hallar el corte en las caras contiguas y luego unir los extremos.

También se puede obtener el corte de una arista inclinada haciendo pasar por ella un plano proyectante π (por ejemplo vertical, que pasa por r_1). La intersección de ese plano π con el plano dado es una recta s que corta a la arista r en el punto buscado.

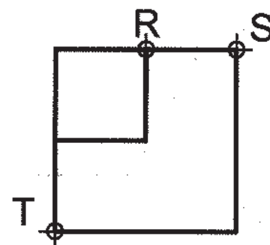


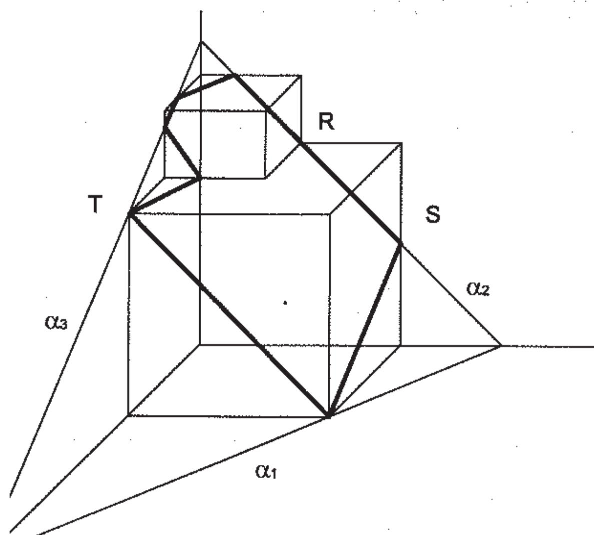
EJERCICIO RESUELTO 6

Dibujar la sección que el plano que pasa por los puntos R, S y T produce en la figura dada.



μ=0'5
φ=135º





EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar las trazas de la recta AB: A(2,3,2) y B(-1,1,4); en una caballera de μ = 0'7 y φ = 135°.

2. Hallar las trazas de la recta AB: A(1,2,-1) y B(3,1,3); en una caballera de μ = 0'5 y φ = 150°.

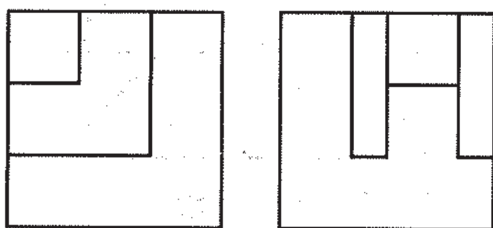
3. Hallar las trazas de la recta AB: A(3,2,3) y B(1,5,6); en una caballera de μ = 0'7 y φ = 150°.

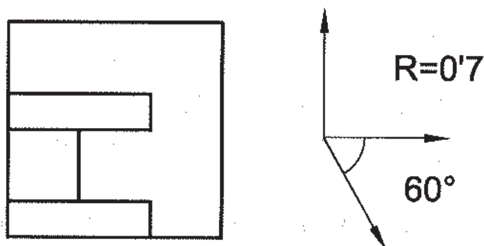
4. Hallar las trazas del plano que pasa por los siguientes puntos: A (2,2,2); B (-2,8,1) y C (-1,1,4). Datos: μ = 0'5 y φ = 135°.

5. Hallar las trazas del plano que pasa por los puntos D(1'5,2,1'5); E(5,6,1) y F (1,4,0'5); μ = 0'6 y φ = 135°.

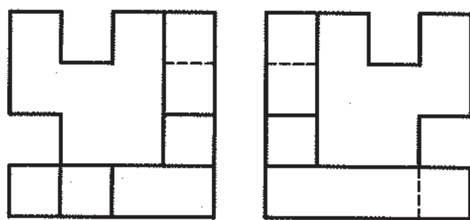
6. Hallar las trazas del plano que pasa por los puntos A(2,1,2); B (1,4,1) y C (3,2'5,0'5); μ = 0'5 y φ = 150°.

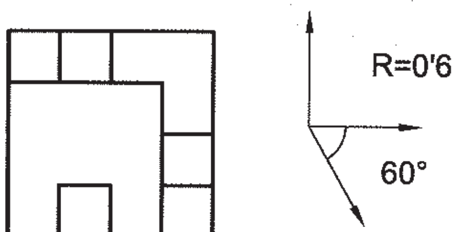
7. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre.



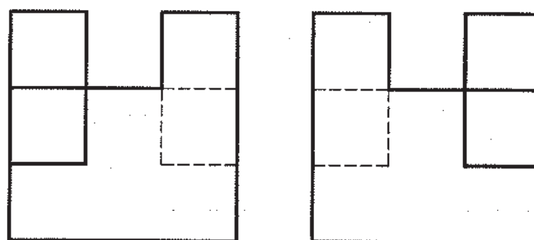


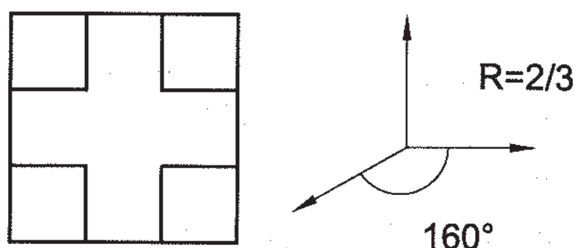
8. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre.



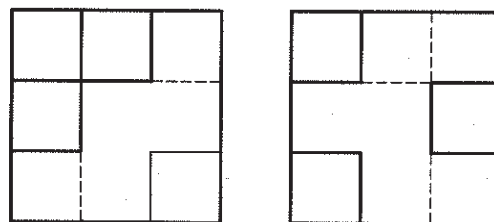


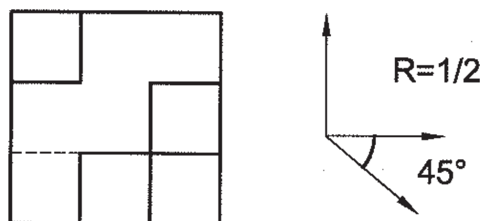
9. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre.



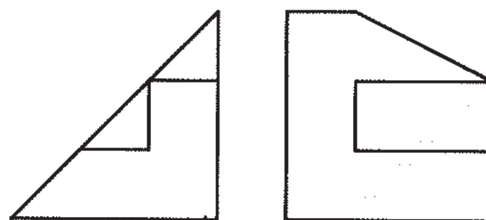


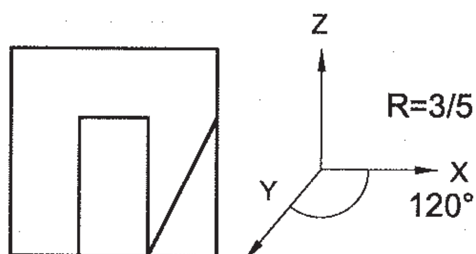
10. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre.



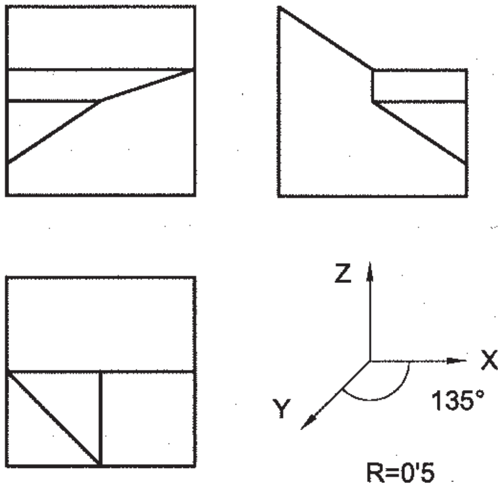


11. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre.

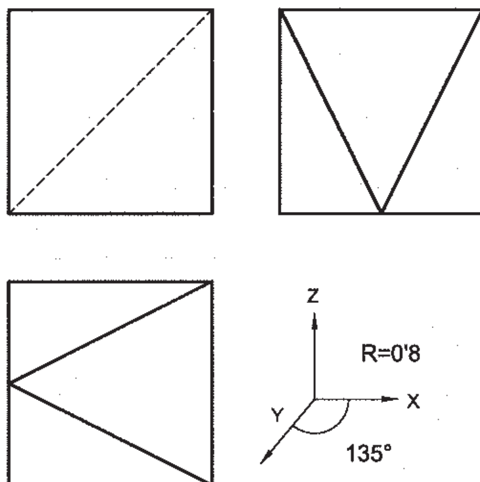




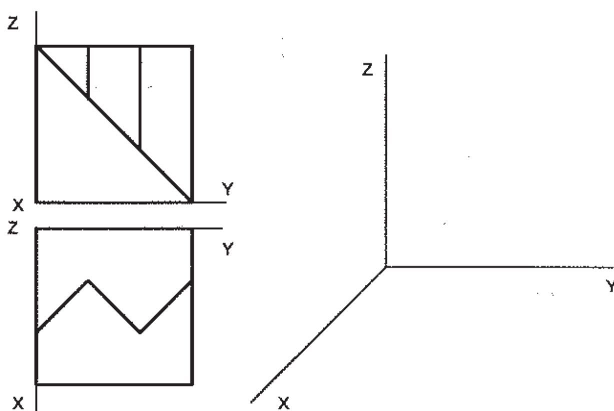
12. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre



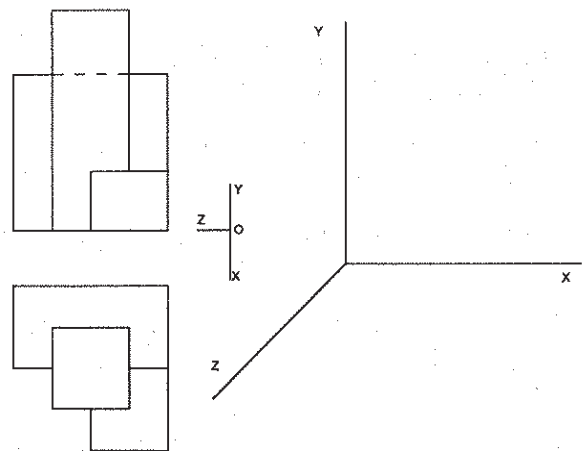
13. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre



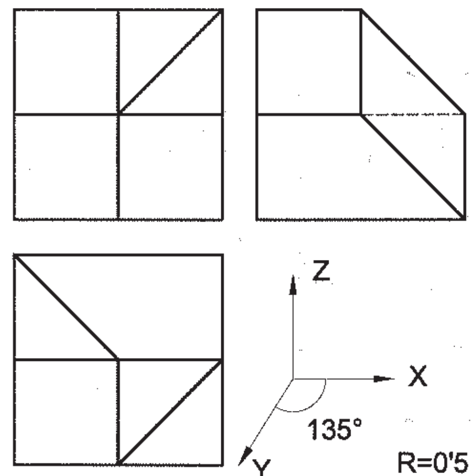
14. Representar en perspectiva caballera la pieza adjunta, dada en diédrica. Tómese Cx=1.



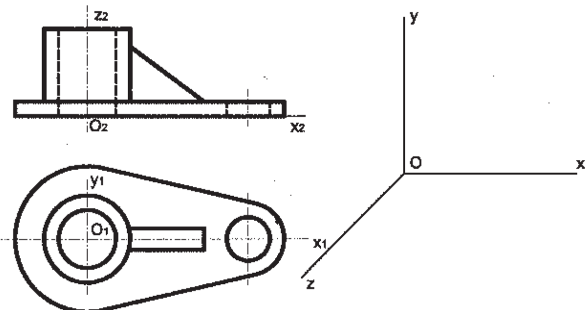
15. Representar la figura en una caballera de Cz=3/4.



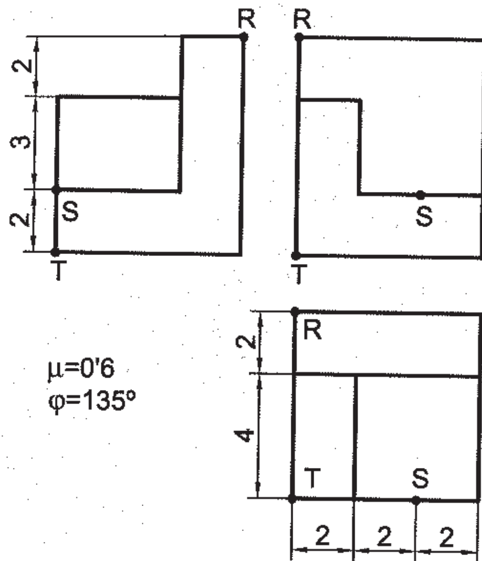
16. Representar la siguiente figura en caballera, a escala libre



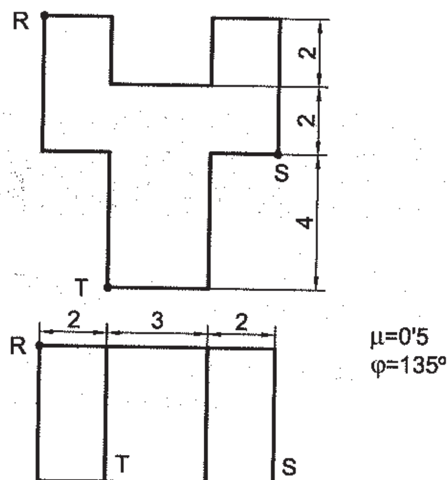
17. Representar en perspectiva caballera la pieza dada por sus proyecciones diédricas, situándola según las referencias y con coeficiente de reducción en el eje z de 0,5.



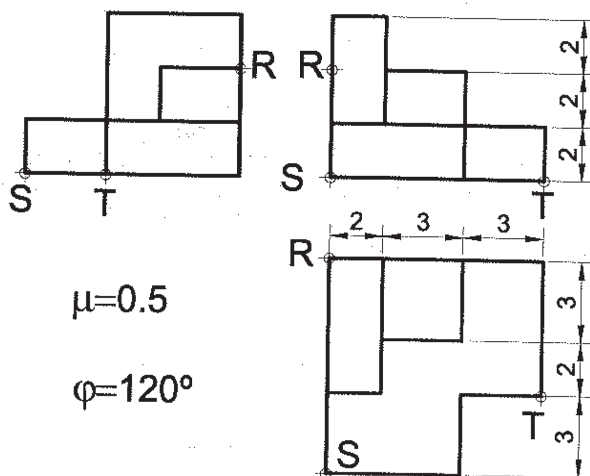
18. Dibujar el corte que el plano que pasa por los puntos R, S, T produce en la siguiente figura:



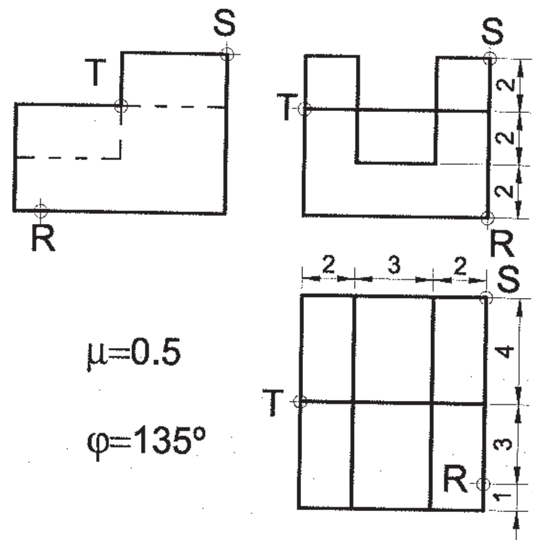
19. Dibujar el corte que el plano que pasa por los puntos R, S, T produce en la siguiente figura:



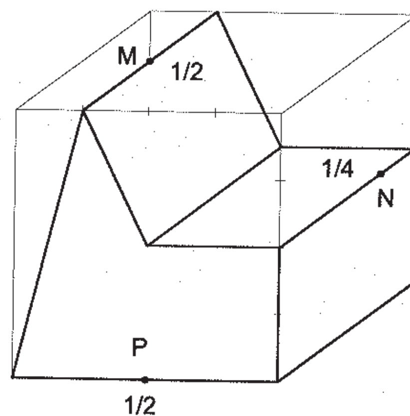
20. Dibujar el corte que el plano que pasa por los puntos R, S, T produce en la siguiente figura:



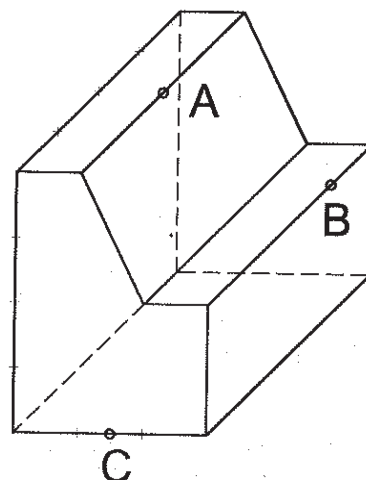
21. Dibujar el corte que el plano que pasa por los puntos R, S, T produce en la siguiente figura:



22. Dibujar la pieza resultante de seccionar el sólido dado por el plano definido por los tres puntos M, N y P. Dimensiones del cubo a elección del alumno.

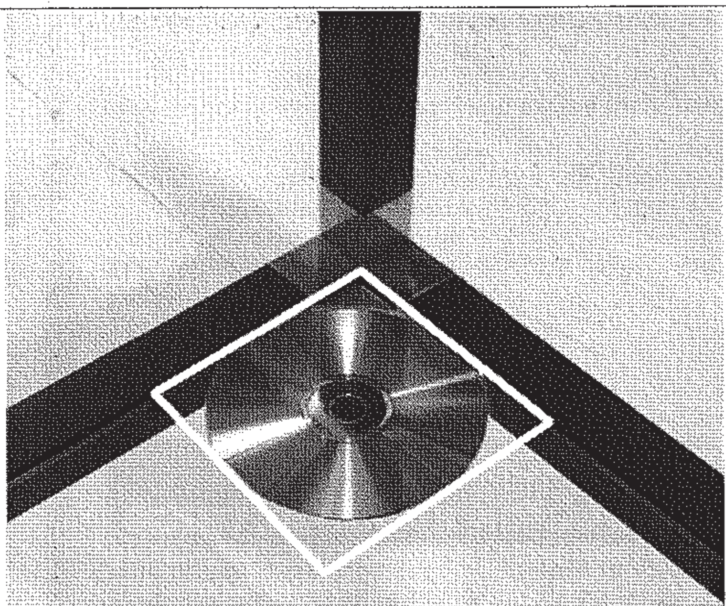


23. Dibujar la pieza resultante de cortar el sólido dado por el plano definido por los puntos A, B y C, eliminando la parte anterior.



TEMA 15

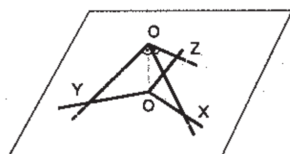
PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA

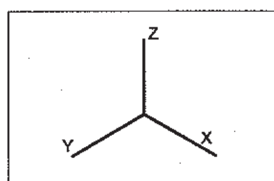


1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Se llama así al sistema de representación que se basa en la proyección cilíndrica ortogonal del espacio sobre un plano, llamado *plano del cuadro*. También hay axonometría oblicua, por ejemplo la caballera.

Un triedro de referencia del espacio lo proyectamos de la siguiente forma:





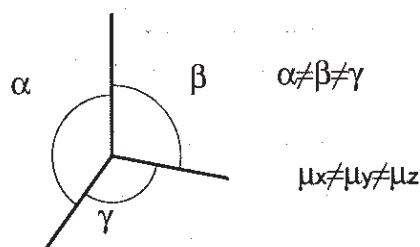
Como se ve, en la proyección ninguno de los ejes está en verdadera magnitud. Habrá por tanto un coeficiente de reducción para cada eje. Su valor dependerá de la colocación de los ejes.

La forma de representar puntos, rectas, planos y cuerpos es muy similar a como se hace en la perspectiva caballera.

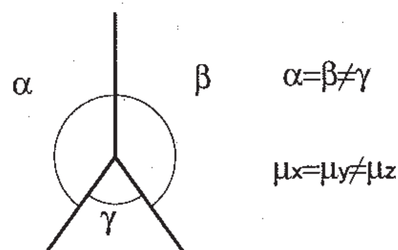
2. TIPOS DE AXONOMETRÍA ORTOGONAL

Según sea la posición de los ejes con respecto al plano de proyección, salen tres tipos de axonométrica:

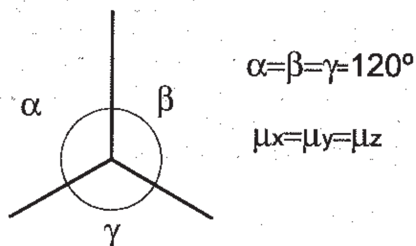
- **Trimétrica:** Los tres ángulos entre los ejes coordenados proyectados son distintos, por lo que hay tres coeficientes de reducción.



- **Dimétrica:** Dos ángulos entre los ejes coordenados proyectados son iguales, por lo que dos ejes (en la figura, el eje x y el y) tienen el mismo coeficiente de reducción, distinto del que tiene el tercer eje.



• **Isométrica:** Hay un solo coeficiente de reducción para los tres ejes, ya que los tres ángulos entre los ejes coordenados proyectados son iguales y miden 120°. Es el que más se usa, y es el que utilizaremos a partir de ahora.

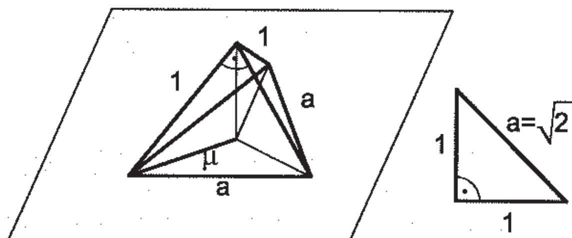


3. COEFICIENTE DE REDUCCIÓN EN ISOMÉTRICA

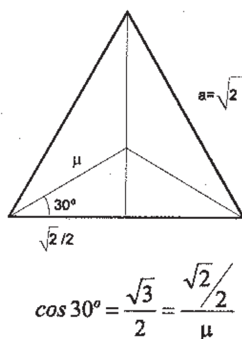
En caballera vimos que el coeficiente de reducción podía ser cualquiera. Sin embargo, en isométrica no es así, tiene un valor siempre igual. Vamos a deducir su valor.

Supongamos que el plano de proyección corta a los ejes espaciales a una distancia del origen igual a la unidad. Por definición, la proyección de esta distancia será precisamente el valor del coeficiente de reducción μ.

En el plano de proyección se nos forma un triángulo equilátero de lado $a = \sqrt{2}$, ya que a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son segmentos en los ejes en el espacio que miden 1.



En ese triángulo equilátero, por geometría, podemos calcular el valor de μ:



$$\cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}/2}{\mu}$$

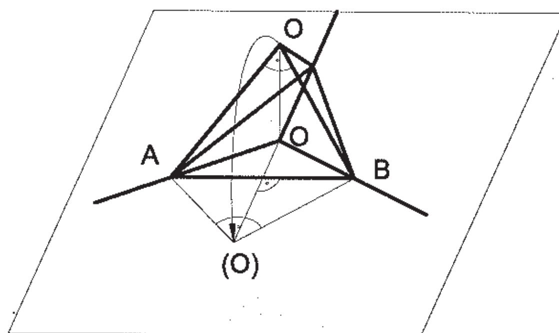
Por tanto,

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0'81 \cong 0'8$$

Es decir, en isométrica el coeficiente de reducción no toma un valor cualquiera, sino que es siempre 0'8. Sin embargo, a veces se coge como valor 1, que es lo mismo que hacer el dibujo un poco mayor, a escala 5:4. Pero si no se dice nada, hay que coger el valor normal 0'8.

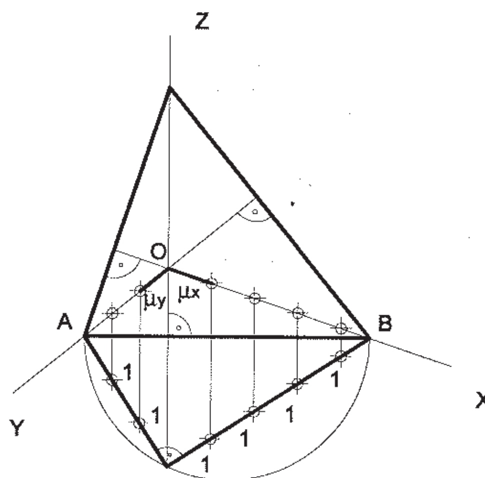
4. GRADUACIÓN GRÁFICA DE LOS EJES

Se llama triángulo de trazas a aquel que es paralelo al plano de proyección y tiene sus vértices en los ejes. Está en verdadera magnitud, pues es paralelo al plano de proyección. El origen de coordenadas es el ortocentro de todo triángulo de trazas, y las proyecciones de los ejes coordenados son perpendiculares a sus lados opuestos. Por ejemplo, en el dibujo, la proyección del eje z es perpendicular al lado AB.



Para graduar gráficamente los ejes coordenados (y esto vale no sólo para la isométrica, sino también para cualquier axonométrica), se halla un triángulo de trazas, que es un triángulo cualquiera con los lados perpendiculares a los ejes y con los vértices sobre ellos. Se abate el triángulo AOB alrededor de AB. El punto (O) abatido del origen estará en la intersección de la perpendicular desde O al segmento AB con el arco capaz de 90° del mismo segmento AB, ya que el triángulo AOB es rectángulo.

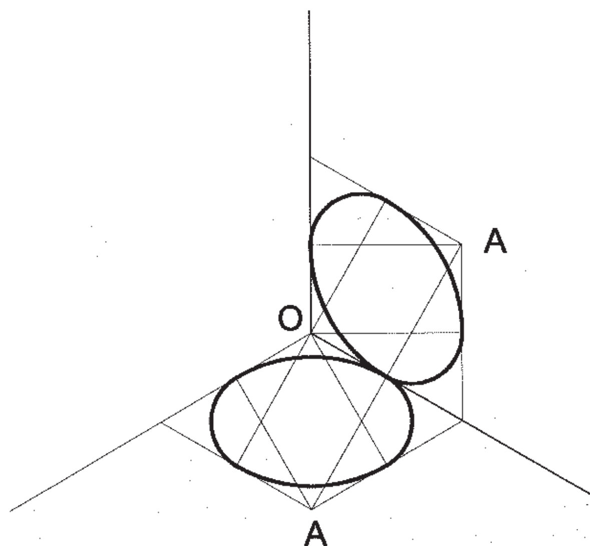
Una vez abatido el triángulo AOB, se llevan las unidades en esos ejes -que están en verdadera magnitud- y se trazan por ellas perpendiculares a AB, que divide a las proyecciones de los ejes en las unidades proyectadas que buscábamos.



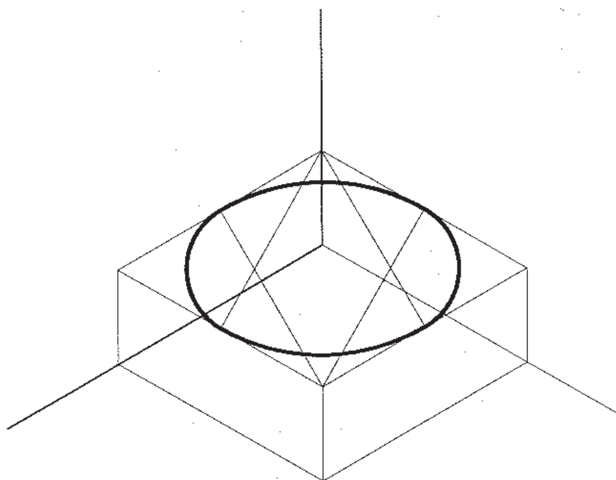
5. DIBUJO DE CIRCUNFERENCIAS EN ISOMÉTRICA

Estas circunferencias se proyectan realmente como elipses, pero se suelen aproximar a óvalos, que son curvas formados por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre sí.

Para dibujarlas, la circunferencia se inscribe en un cuadrado, y éste se dibuja en isométrica. Se unen los puntos medios de los lados con los vértices que son ángulos obtusos. Los puntos de intersección de esas rectas son los centros de los arcos laterales, y los vértices A y O son los centros de los otros dos arcos más pequeños. Los puntos de unión (tangentes) de los arcos son los puntos medios de los lados del cuadrado.



Si la circunferencia está en un plano paralelo a los coordenados, se hace igual, pero dibujando el cuadrado que circunscribe a la circunferencia en ese plano.



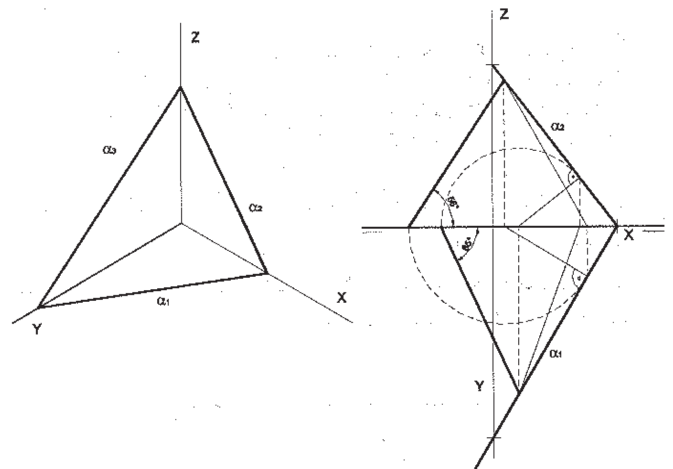
6. RELACIÓN CON EL SISTEMA DIÉDRICO

A la hora de resolver algunos problemas, como medir ángulos, verdaderas magnitudes de segmentos, distancias, etc, puede ser útil considerar un sistema diédrico que tenga la línea de tierra en el eje X (o en eje Y), y los planos XZ e YX como planos vertical y horizontal de referencia. Así se puede resolver el problema planteado en diédrica.

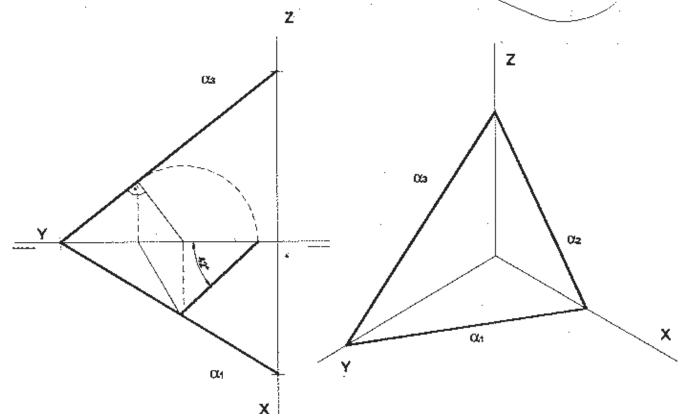
EJERCICIO RESUELTO 1

Hallar el ángulo que el plano α forma con los planos coordenados.

Se dibuja el plano α en diédrica, tomando el eje X como LT, y se halla el ángulo que forma una recta de máxima pendiente con el plano horizontal XY. También se halla el ángulo que una recta de máxima inclinación forma con el plano vertical XZ.

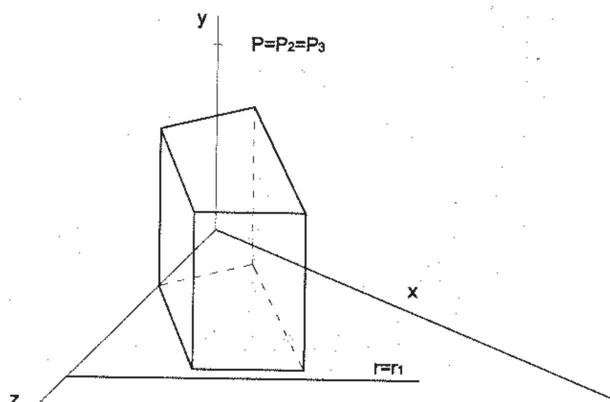


Para obtener el ángulo que forma con el plano YZ, se coge un nuevo sistema diédrico que tenga la LT en el eje Y, y se halla el ángulo que forma una recta de máxima inclinación con el plano vertical YZ.

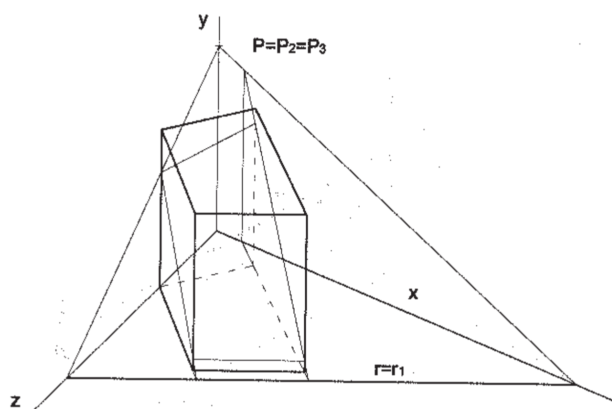


EJERCICIO RESUELTO 2

Determinar la sección que el plano definido por la recta r y el punto P produce en el prisma recto dado, cuya base se sitúa en el plano horizontal OXZ.

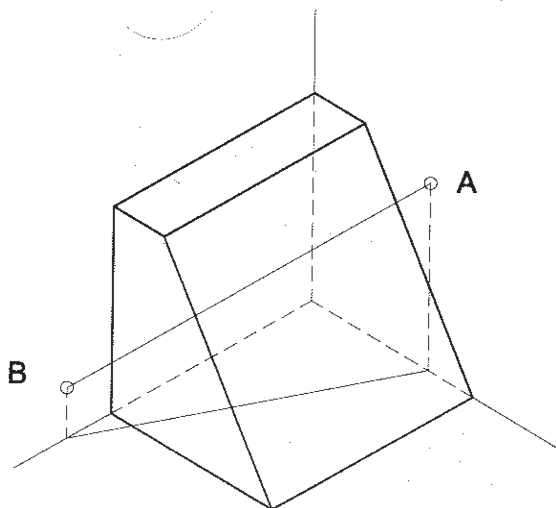


Las trazas del plano son fáciles de hallar con r y P. Para hacer el corte del cuerpo, se extienden las caras hasta que corten al plano dado.

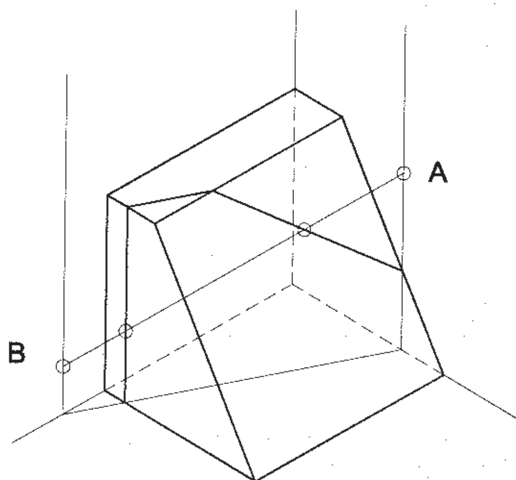


EJERCICIO RESUELTO 3

En el sistema isométrico de la figura, calcular la intersección de la recta AB con la pieza representada.

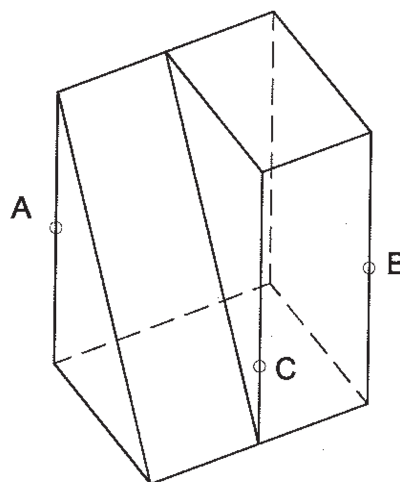


Basta con hacer un plano proyectante vertical que pase por la recta AB y hallar el corte que produce al cuerpo. La intersección del ese corte con la recta AB será la solución.

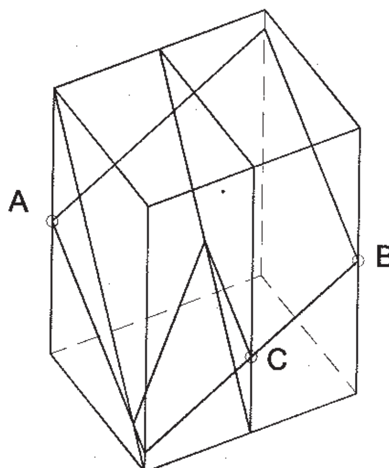


EJERCICIO RESUELTO 4

Determinar la sección que el plano definido por los puntos A, B y C produce en el cuerpo poliédrico de la figura.

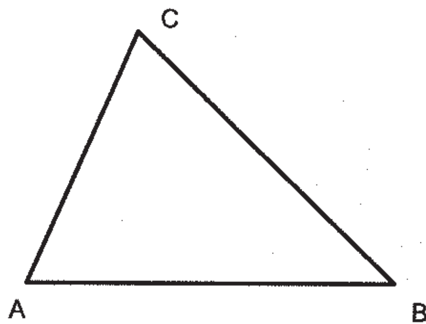


Podemos prolongar las caras y suponer el prisma completa. El corte entonces sale inmediato.

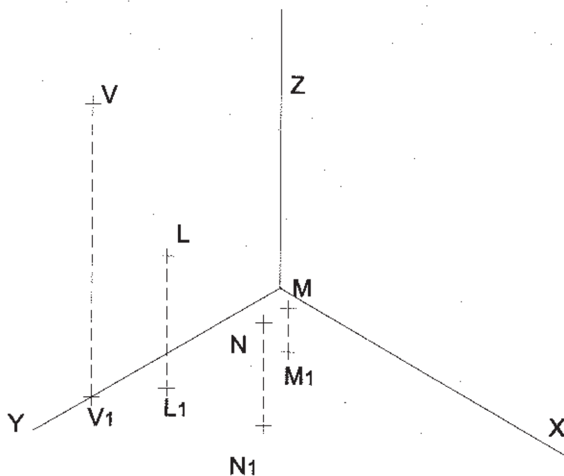


EJERCICIOS PROPUESTOS

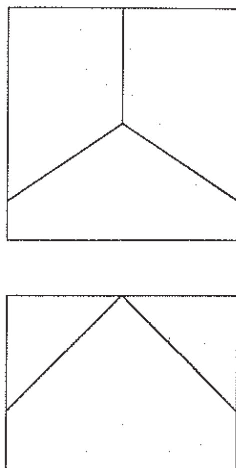
1. El triángulo ABC es el triángulo de trazas de una perspectiva axonométrica. Dibujar los ejes y graduar cada uno con tres marcas que correspondan a centímetros en verdadera magnitud.



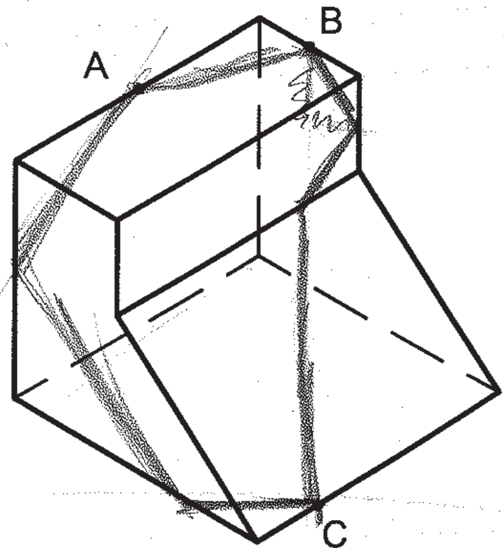
2. Los puntos L, M y N pertenecen a las aristas laterales de una pirámide oblicua de vértice el punto V, y su base está en el plano XOY. Dibujar la pirámide indicando las líneas ocultas.



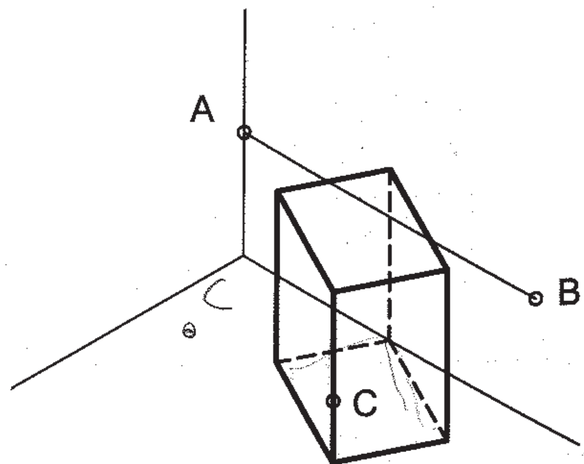
3. Representar en perspectiva isométrica la pieza adjunta.



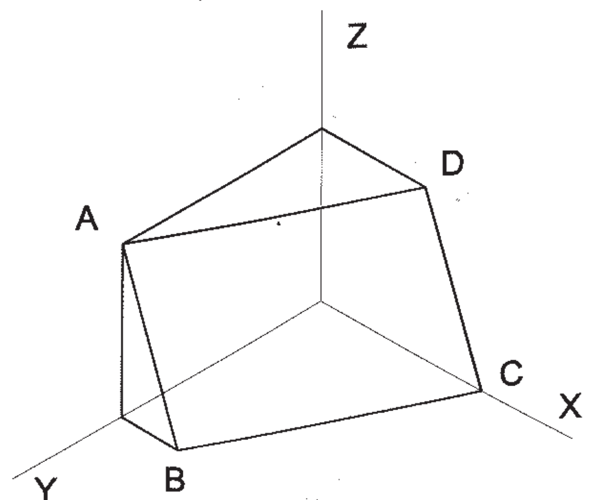
4. Determinar la sección producida en la pieza dada por el plano definido por los puntos A, B y C.



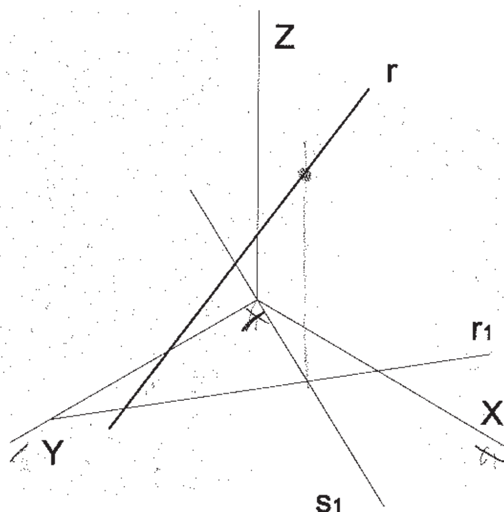
5. Determinar la sección producida en el prisma por el plano definido por los puntos A, B y C.



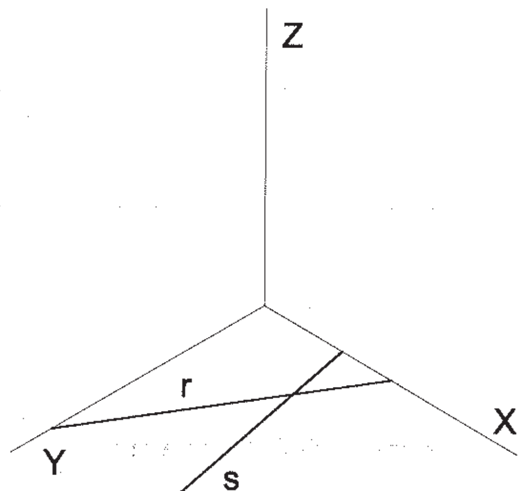
6. Determinar la verdadera magnitud del ángulo que forma la cara ABCD con el plano XY.



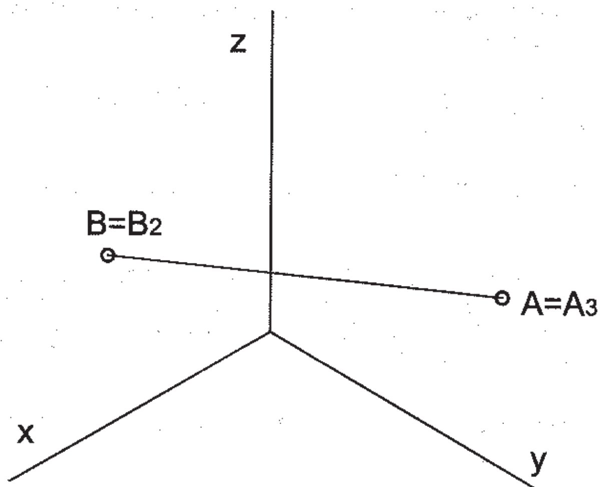
7. Las rectas r y s pertenecen a un plano cuyas rectas horizontales (paralelas al XY) forman 60° con el ZY. Hallar la proyección directa de la recta s.



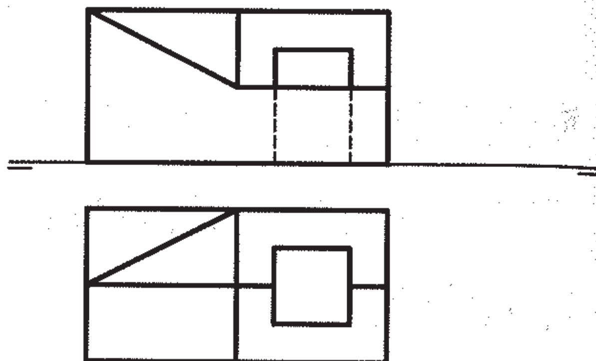
8. Las rectas r y s están situadas en el plano horizontal del sistema isométrico dado. Calcular el valor del ángulo que forman.



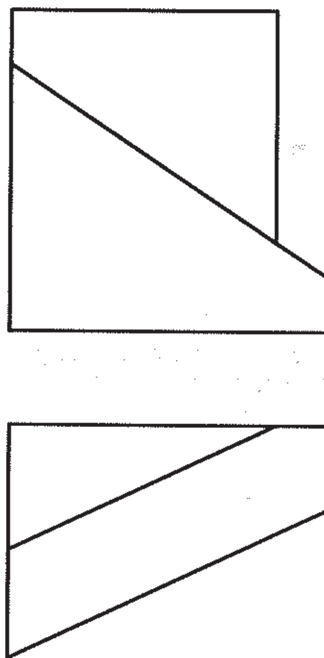
9. Hallar la verdadera magnitud de la longitud del segmento AB, que es paralelo al plano XOY.



10. Dibujar en perspectiva isométrica el cuerpo definido por sus Dadas las proyecciones de la pieza siguiente, en el sistema diédrico, dibujarla en isométrico (no aplicar reducción).

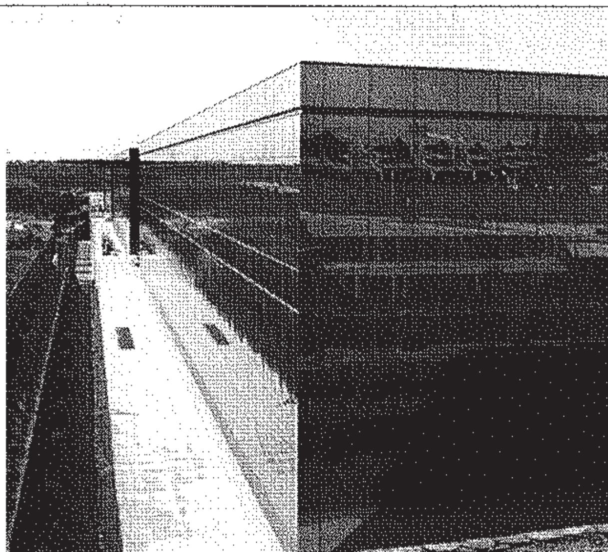


11. Representar en perspectiva isométrica la pieza adjunta, dada en diédrica.



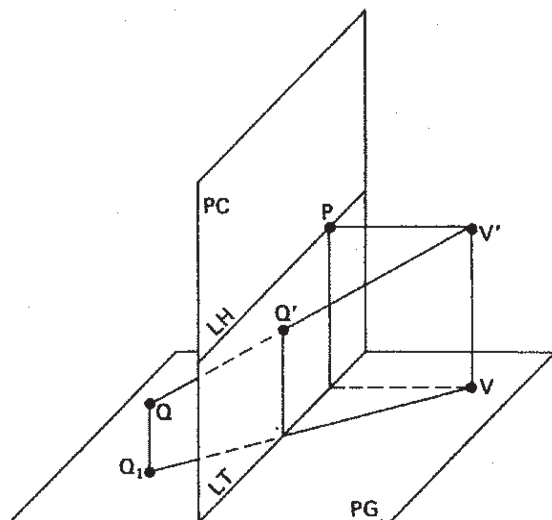
TEMA 16

SISTEMA CÓNICO DE PERSPECTIVA LINEAL



Este sistema se basa en la proyección de los puntos del espacio sobre un plano llamado *plano del cuadro, PC,* desde un punto V' llamado *punto de vista.*

La proyección del punto Q será Q', que es la intersección del rayo proyectante V'Q, con el plano del cuadro PC.



Podemos distinguir los siguientes elementos:

Plano del cuadro, PC: Es el plano sobre el que se proyecta el objeto. Es el correspondiente a nuestra lámina.

Punto de vista, V': Es el punto del que parten todos los rayos proyectantes, llamados visuales. Coincide con la situación del observador.

Plano geometral, PG: Plano horizontal de referencia. Corresponde al suelo.

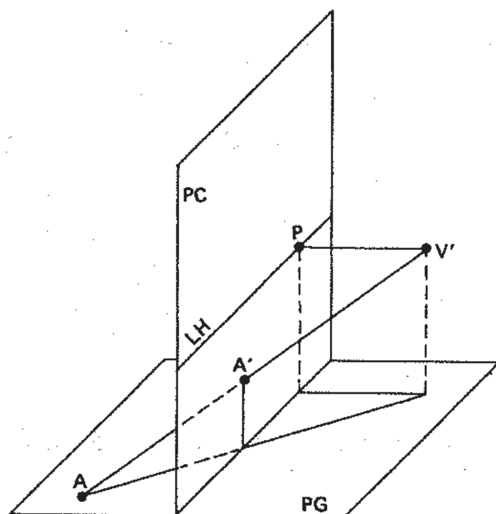
Línea de tierra, LT: Es la intersección del plano del cuadro y el geometral.

Línea del horizonte, LH: Es la intersección del plano del cuadro con un plano paralelo al plano geometral que pasa por V'. Es una línea paralela a la línea de tierra y a una altura igual a la del punto de vista V'.

Punto principal, P: Es la proyección ortogonal de V' sobre el plano del cuadro.

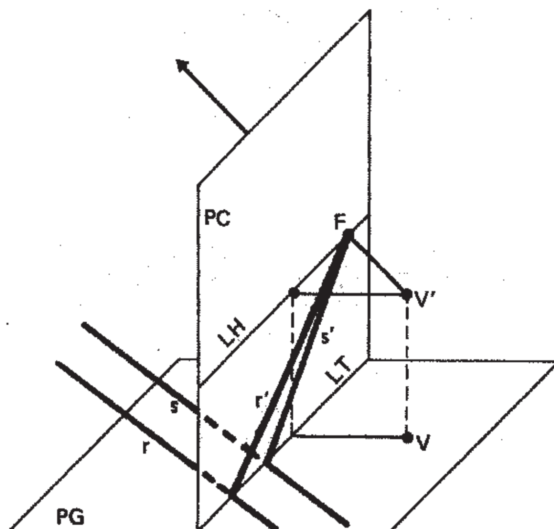
1. PUNTO DE FUGA DE UNA DIRECCIÓN HORIZONTAL

Sea A un punto del plano geometral y A' su proyección cónica. Si vamos alejando el punto A, el rayo V'A se va haciendo cada vez más horizontal y A' se va acercando a la LH. Cuando A esté en el infinito, A' estará en la LH. Por eso, la LT es la perspectiva cónica de los puntos del infinito del PG.

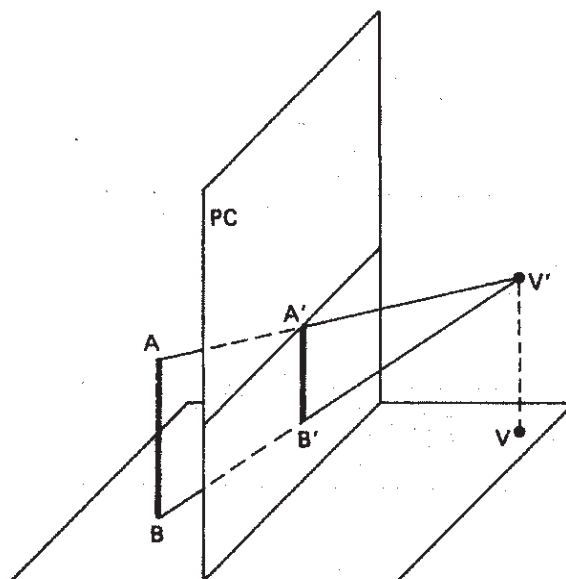


Todas las rectas paralelas contenidas en el PG se cortan en un punto del infinito, por lo que, en cónica, se cortan en un punto de la LH, llamado *punto de fuga*, F, de esa dirección. Hay uno para cada dirección.

Para hallar el punto de fuga de una recta r, se une V' con el punto infinito de esa recta, trazando por V' una paralela a r. Esa recta corta al plano del cuadro en F, que está en la LH. Si cogemos otra recta s paralela a r, para hallar la perspectiva cónica de s_∞ se hace la mismo construcción y nos vuelve a salir F. Por tanto, hay un único punto de fuga para cada dirección.



Todo línea horizontal, aunque no está en el plano geometral, tiene su punto de fuga en la LH.
La perspectiva cónica de la recta r será r', que se obtiene como unión entre F y la intersección de r con la LT.
Un segmento vertical tiene de perspectiva cónica otro segmento paralelo al original, pero de distinta magnitud.



2. CONSTRUCCIÓN PRÁCTICA DE UNA PERSPECTIVA CÓNICA

Una vez vistos los fundamentos de este sistema, veamos cómo se dibuja la perspectiva cónica en un caso concreto. Supongamos que queremos dibujar un objeto de forma paralelepipédica, cuyas aristas horizontales y tienen sólo dos direcciones.

Se parte de la planta y alzado de la figura, con la situación de V, LT, LH y PC fijados. La planta la necesitamos a escala, ya que sobre ella haremos construcciones auxiliares. Sin embargo el alzado sólo nos interesa en croquis, para saber las alturas de los detalles del objeto.

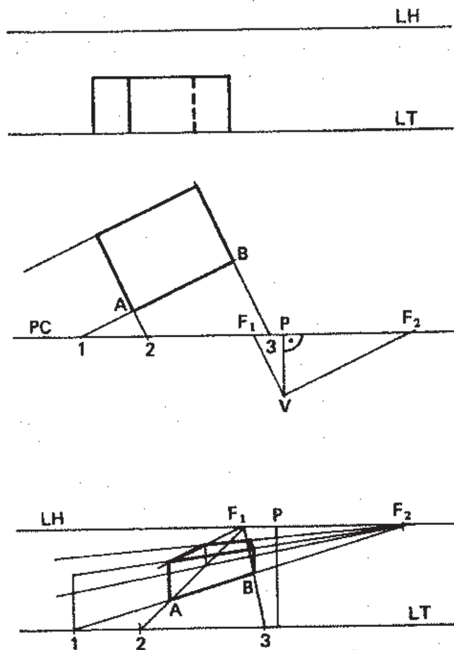
En la planta se trazan por V rectas paralelas a las direcciones de las aristas, así como una perpendicular al PC. Así hallamos el punto P y los puntos de fuga F_1 y F_2 de las dos direcciones principales del objeto, que estarán en la LH.

Prolongamos en planta las aristas hasta que corten al PC en los puntos 1, 2, 3... Se llevan esos puntos a la LT y se unen a los correspondientes puntos de fuga de las direcciones F_1 o F_2. La intersección de esas rectas es la perspectiva cónica de la planta del cuerpo.

Para subir las alturas, las caras verticales se suponen prolongadas hasta el PC, donde las alturas están en verdadera

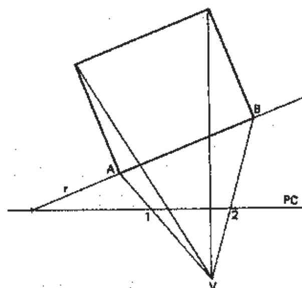
Dibujo isométrico → sin pr
Perspectiva isométrica → con pr

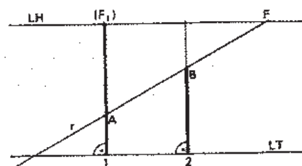
magnitud. Es decir, desde el punto 1 se sube la altura y se fuga a F_2. Subiendo verticales desde A y B tenemos la cara delantera. Fugando y subiendo verticales desde los vértices de la base obtenemos todo el cuerpo.



Método de las visuales

Si tenemos la recta r y queremos situar en ella los puntos A y B, basta con llevar en la planta dos visuales desde V, que cortan al PC en los puntos 1 y 2. Se llevan a nuestro dibujo en la LT y se suben verticales. Las intersecciones con la perspectiva de la recta r nos dan los puntos A y B.
Esto es debido a que, en planta, la recta VA tiene su punto de fuga en el punto 1, luego su proyección cónica será la recta que sale de 1 y va a su punto de fuga (F_1), que es una recta perpendicular a LT. El corte de VA con r es el punto A. Igual se hace con el punto B.
Este método necesita tener la perspectiva de una recta r, que hay que hallarla por el método normal.

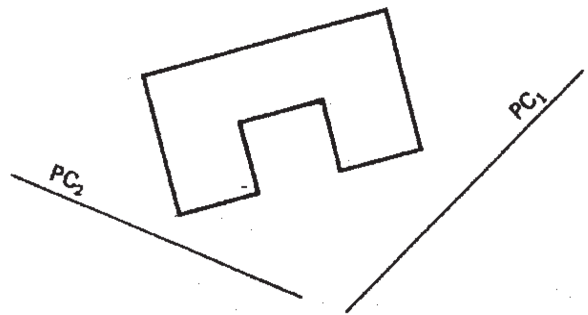




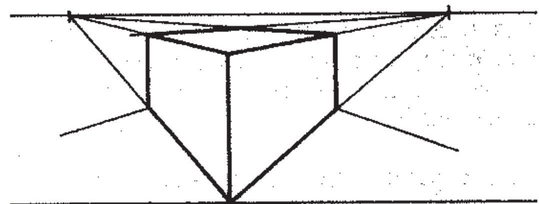
3. VARIACIÓN DE LOS ELEMENTOS

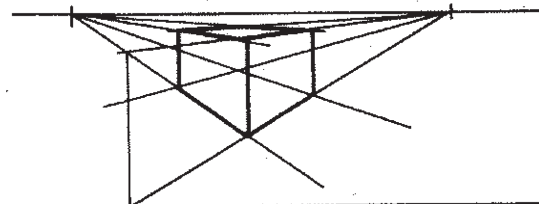
Situación del plano del cuadro

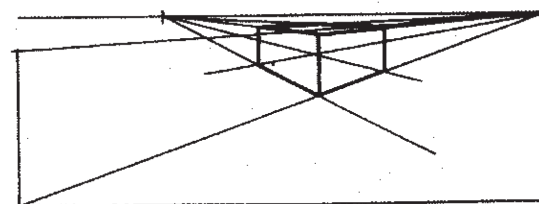
Su posición respecto al objeto dependerá de qué parte del cuerpo queremos que se veo.



Cuanto más cercano al objeto, más grande sale el dibujo, pero también más deformado.

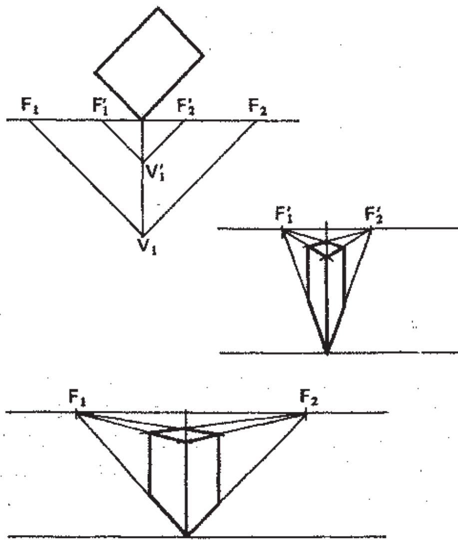




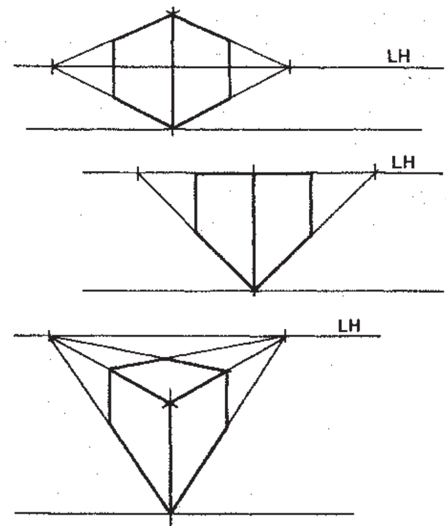


Situación del punto de vista

Cuanto más cercano se encuentre el punto de vista al PC, más juntos saldrán los puntos de fuga y, por tanto, la perspectiva tiene más distorsión.

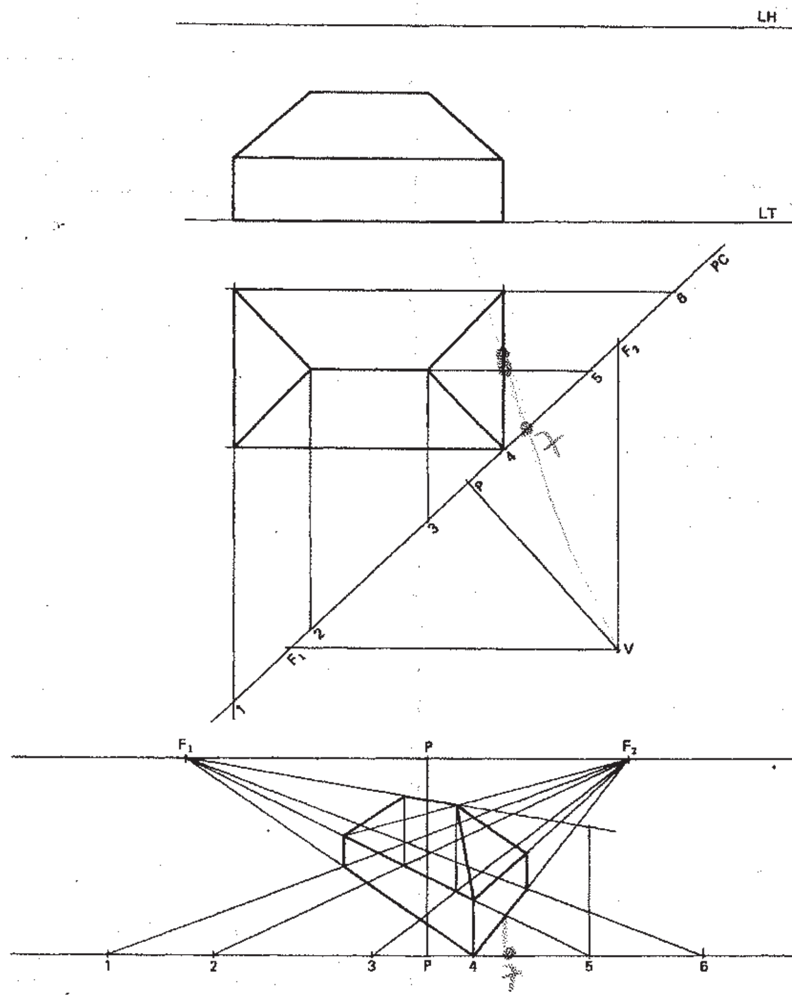


La altura del punto de vista respecto al plano geometral nos da la posición del observador ante el objeto, y por tanto también fija la altura de la LH.



EJERCICIO RESUELTO 1

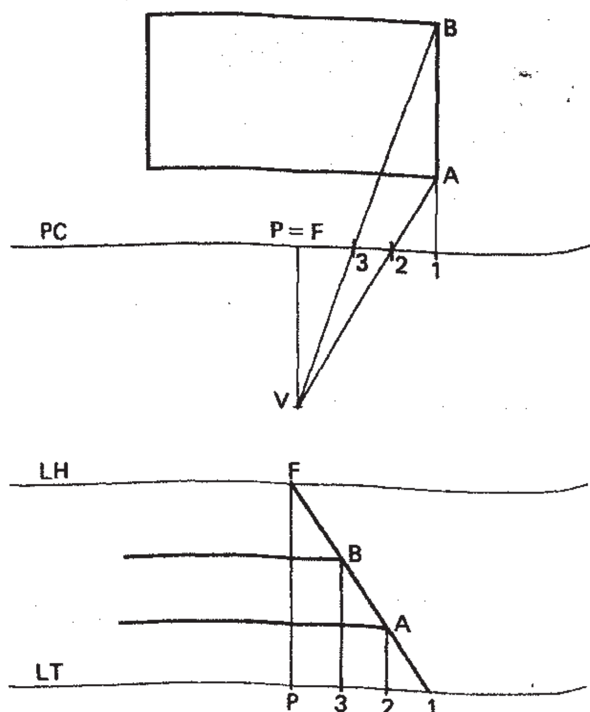
Dibujar la perspectiva cónica con los datos que se dan.



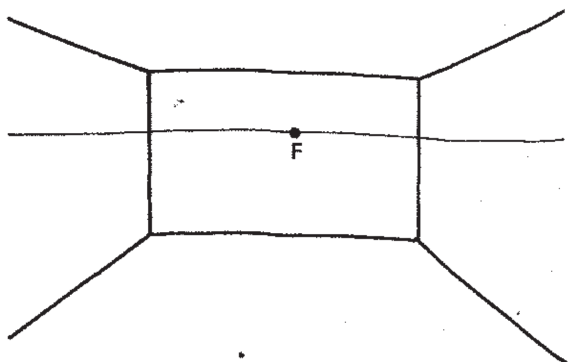
4. PERSPECTIVA CÓNICA CENTRAL

Si situamos el plano del cuadro paralelo a una arista horizontal del objeto, la perspectiva cónica que obtenemos se llama central.

El punto de fuga de la dirección paralela al PC está en el infinito, con lo que las rectas de esta dirección se representan paralelos a la LT. El otro punto de fuga coincide con el punto principal P. En este caso particular de la perspectiva cónica es recomendable utilizar el método de las visuales.

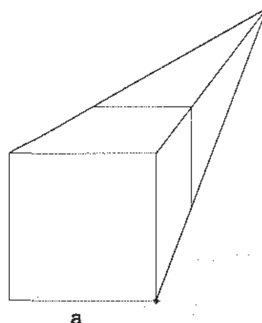


Se emplea mucho en la representación de interiores de edificios, ya que acentúa la profundidad y además se pueden representar cinco de las seis paredes de una habitación, cosa difícil en una perspectiva cónica oblicua.

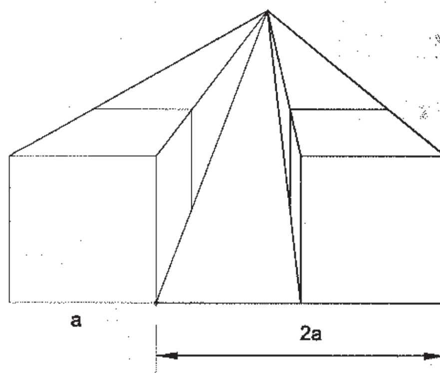


EJERCICIO RESUELTO 2

Dibujar el cubo después de una traslación paralela a la arista a, y de magnitud 2a.

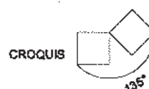


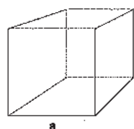
El cubo, al trasladarse, seguirá teniendo las aristas paralelas al original. Y como es una perspectiva central, en las líneas horizontales se conservan las proporciones. Por tanto basta llevar dos veces la longitud a, y construir ahí el cubo fugando las líneas al mismo punto.



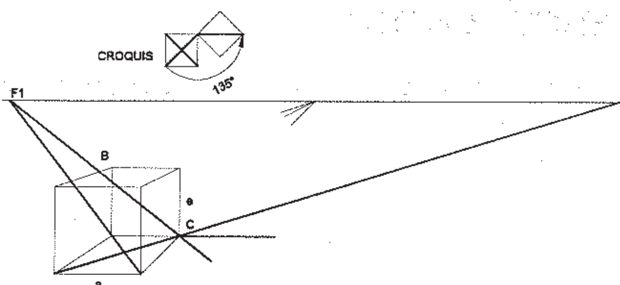
EJERCICIO RESUELTO 3

Representar, en la perspectiva lineal que se ofrece, la nueva posición del cubo de lado a cuando se le ha girado 135° alrededor de su arista vertical e.

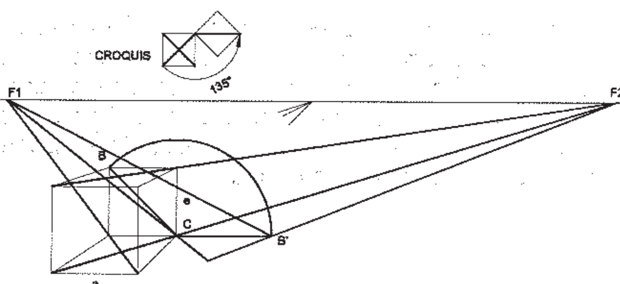




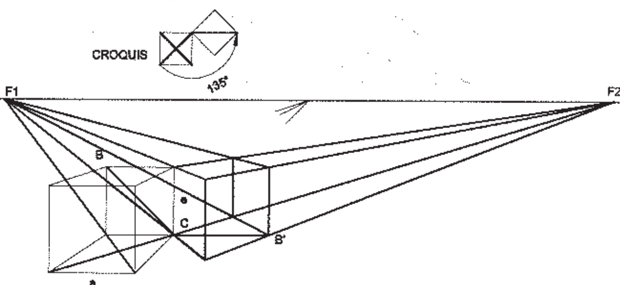
Analizando la planta en el croquis, se observa que las diagonales de las bases del cubo, después de girado, se ponen alineadas con las aristas originales. Por tanto podemos hallar los puntos de fuga de las diagonales y empezar a dibujar la base del cubo girado:



Para hallar las dimensiones del cuno girado, se observa que la diagonal CB de la cara posterior y la CB' de la base girada están en un mismo plano paralelo al del cuadro, por lo que sus dimensiones deben ser iguales.



Una vez hallado B', dibujar el resto del cubo no tiene dificultad.

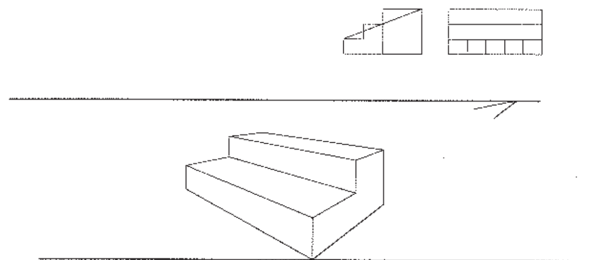


5. TEOREMA DE TALES EN CÓNICA

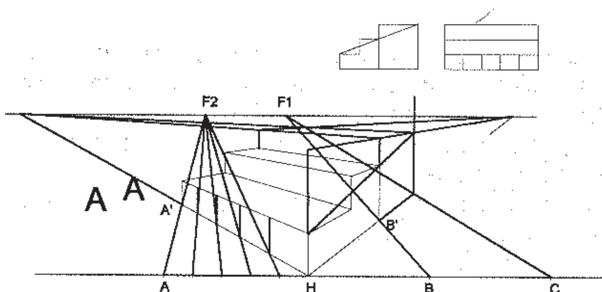
El Teorema de Tales dice que dos rectas de un plano cortadas por un haz de rectas paralelas quedan divididas en segmentos proporcionales. En perspectiva cónica, las rectas paralelas fugan a un mismo punto, y si están en el plano geometral, el punto de fuga estará en la línea del horizonte.
Teneinedo en cuanta que en la Línea de Tierra las medidas están en verdadera magnitud, puede servirnos para dividir segmentos en partes iguales.

EJERCICIO RESUELTO 4

Añadir a la perspectiva de escalera un tercer peldaño cuya huella (parte horizontal) duplica a las anteriores, y dividir la primera contrahuella (parte vertical en cinco baldosas de idéntica anchura.



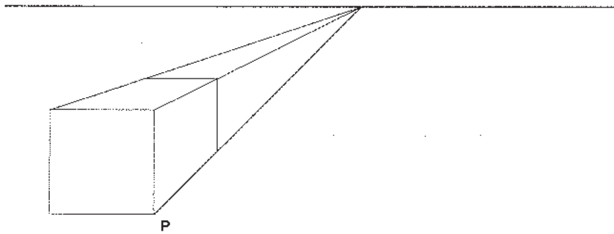
Para hallar la profundidad del tercer escalón en la línea B'H, unimos B' con un punto cualquiera B de la LT. Al unir B con B' y prolongar, obtenemos el punto de fuga F1 de esa dirección. Basta con llevar la distancia BH de nuevo en la LT, para obtener el punto C, el cual, fugado a F1 nos delimita la profundidad.
Para hallar la altura, llevamos desde H (que esté en verdadera magnitud) la altura total, y fugamos. También se podría hacer con la diagonal representada.



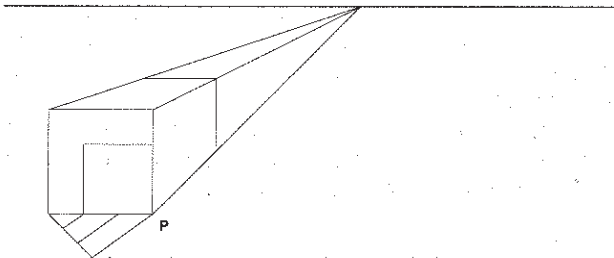
Por último, para dividir la contrahuella tal como nos piden, llevamos hacia la izquierda cinco partes iguales de longitud cualquiera en la LT, a partir del punto H, y obtenemos el punto A. Lo unimos con A' y obtenemos el punto de fuga F_2 de esa dirección. Basta con unirlo con las cinco divisiones en la LT para tener, por Tales, el segmento A'H dividido en cinco partes iguales.

EJERCICIO RESUELTO 5

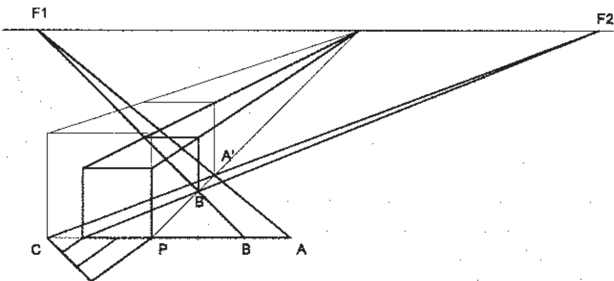
A partir del cubo dado, aplicarle una homotecia de razón 2/3 y centro de homotecia el vértice P.



Como es una perspectiva central, las líneas horizontales conservan las prooporciones. Por tanto en una arista horizontal (también podría ser en una vertical) aplicamos la homotecia sin problemas, y construimos una cara.

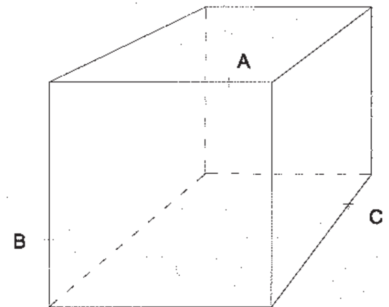


Para obtener la profundidad, podemos suponer una LT en la arista inferior y aplicar el Teorema de Tales en cónica. Llevamos tres segmetos iguales, unimos el punto final A con el A', obtenemos el punto de fuga F1 y lo unimos con B. Así obtendríamos el vértice B'.
Otra posibilidad es usar la diagonal CA' de la cara inferior. Es paralela a la del cubo solución, por lo que fugarán al mismo punto F2.

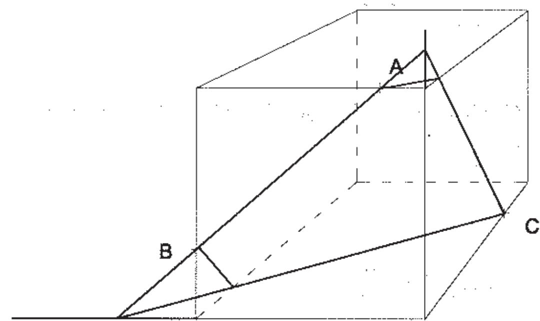


EJERCICIO RESUELTO 6

Hallar el corte del cubo por el plano que pasa por los tres puntos A, B y C.



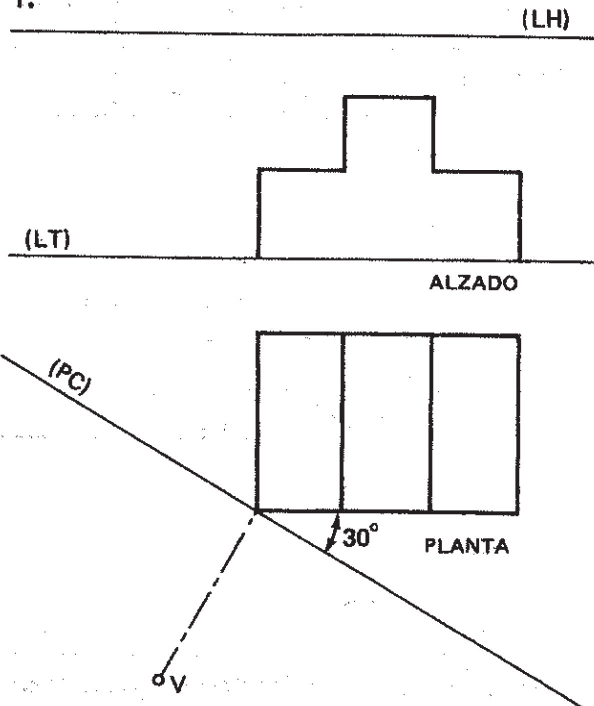
Sabemos que las rectas de corte en caras paralelas son rectas paralelas, pero como estamos en perspectiva cónica, no se dibujan paralelas. Pero basta con prolongar algunas caras (prolongando las aristas) para obtener el corte. Empezamos con al recta AB, que es del corte. Prolongando las aristas llega a las otras caras y así unir con C.



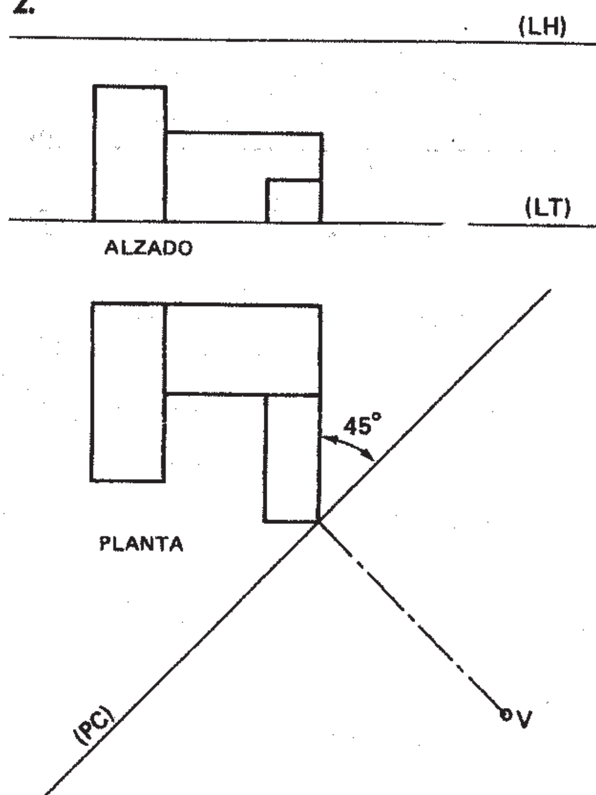
EJERCICIOS PROPUESTOS

Realizar las perspectivas cónicas a escala 2:1 de los siguientes dibujos:

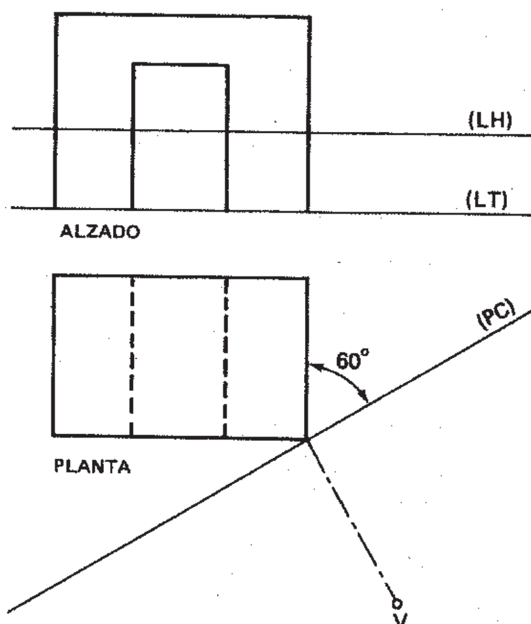
1.



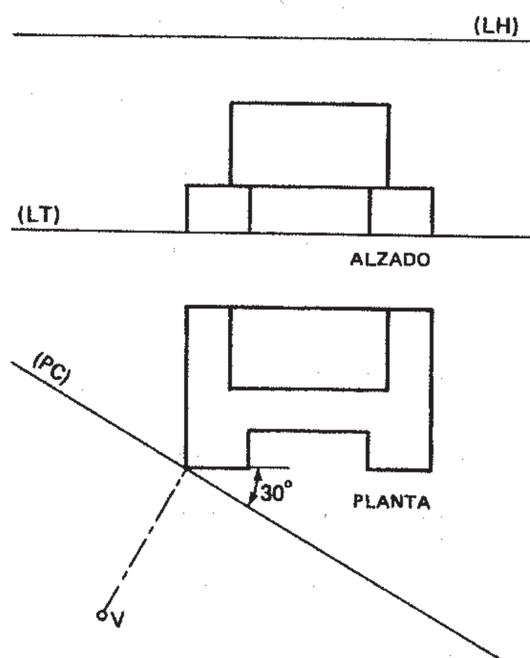
2.



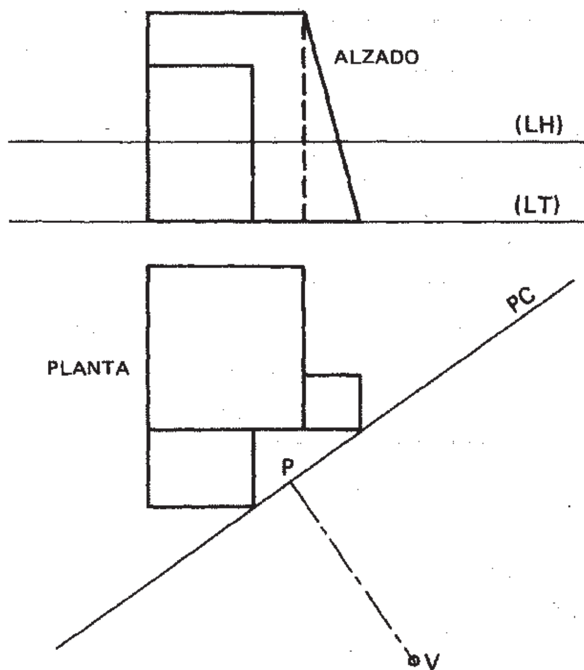
3.



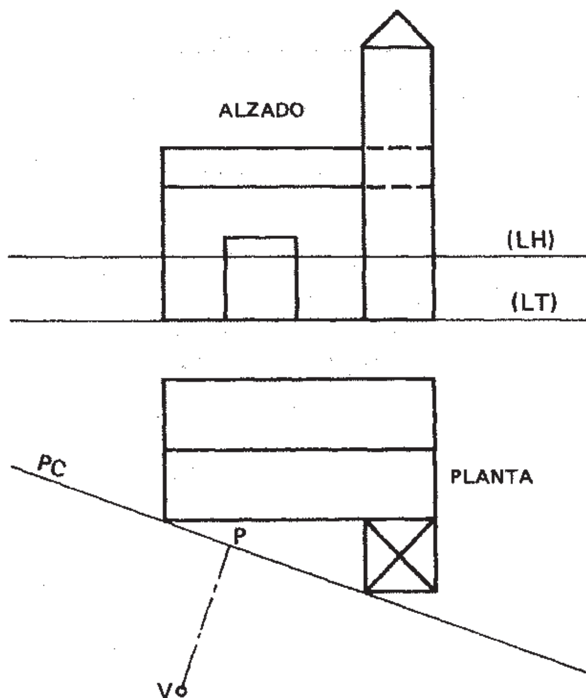
S 4.



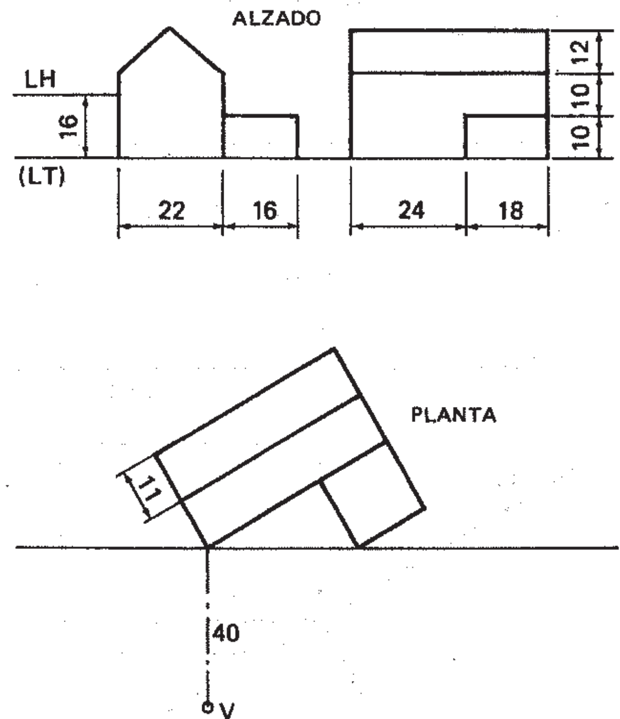
7. Dibujar en perspectiva cónica el siguiente conjunto, a escala 3:1.



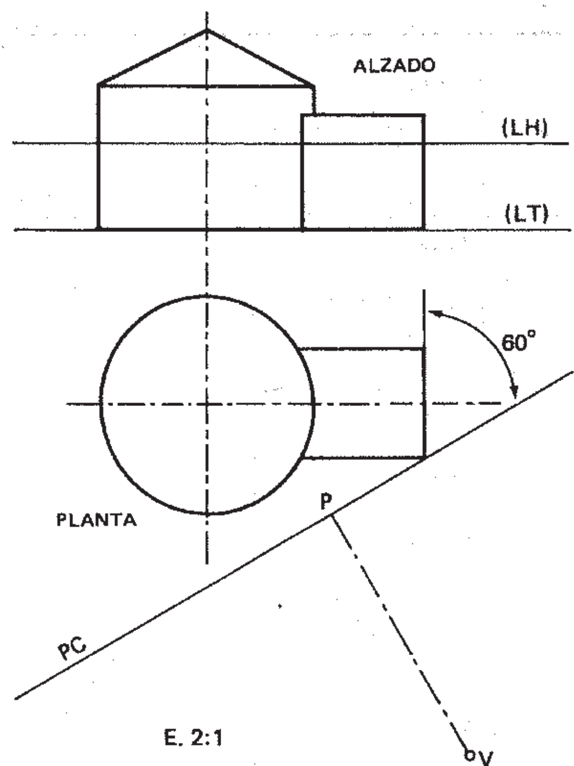
8. Realizar la perspectiva cónica del edificio adjunto, a escala 2 : 1.



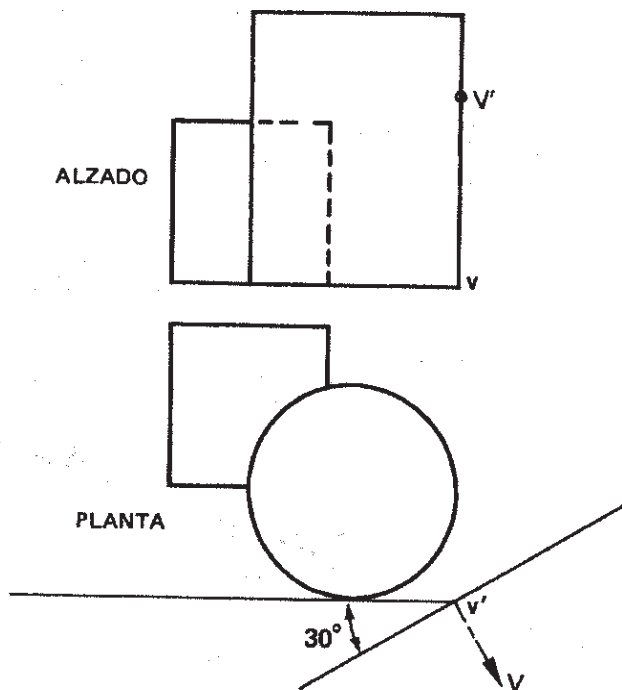
9. Dibujar la perspectiva cónica del sólido adjunto, a escala doble. Cotas en milímetros.



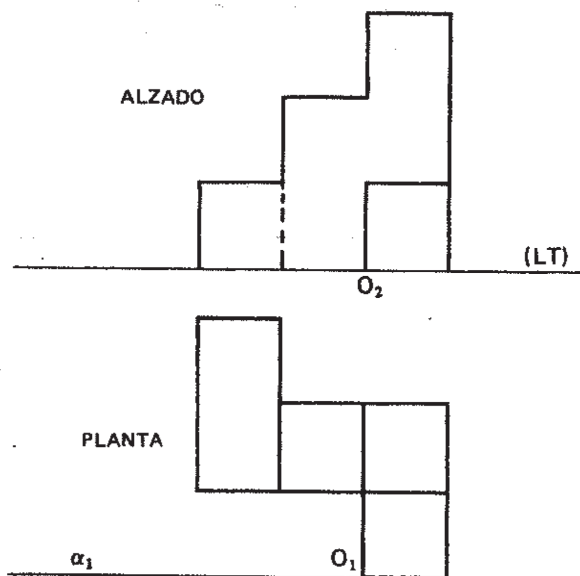
10. Dibujar en perspectiva cónica el conjunto representado.



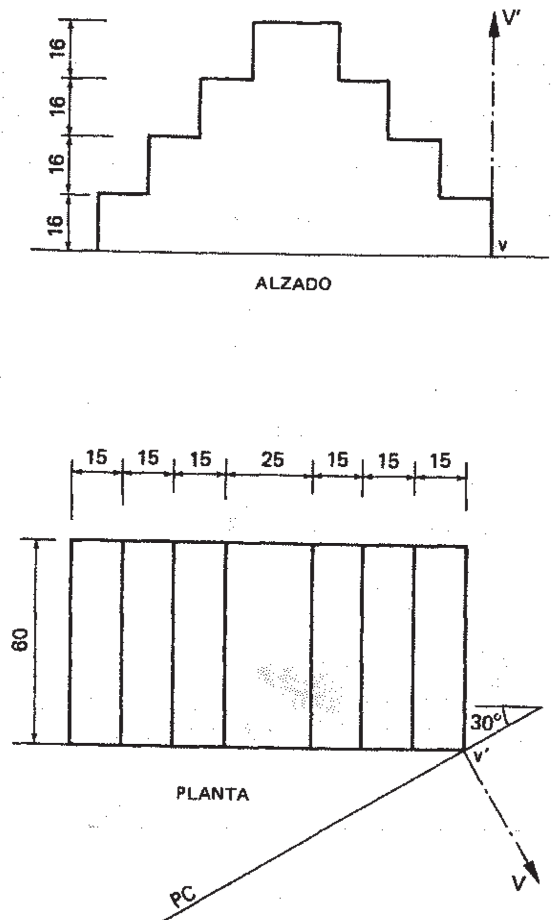
11. Dibujar en perspectiva cónica oblicua la figura dada por sus dos proyecciones, siendo el alejamiento del punto de vista vV'=60 mm, la cota vv'= 32 mm y la escala 2:1, tanto en los datos como en las cotas.



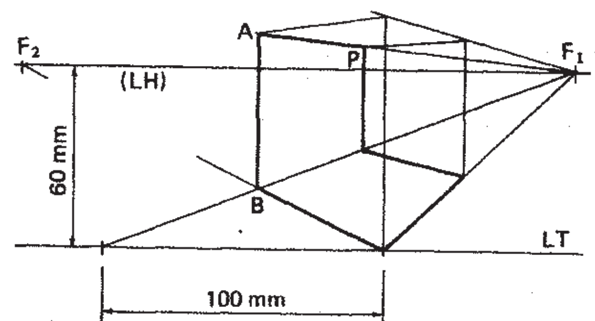
12. Dadas las proyecciones diédricas, dibujar la perspectiva cónica frontal de este módulo obtenido a partir de un cubo de 15 mm de arista. Coordenadas del punto de vista: V(-95, 125, 75). Origen de coordenadas: O. No borrar las construcciones auxiliares.



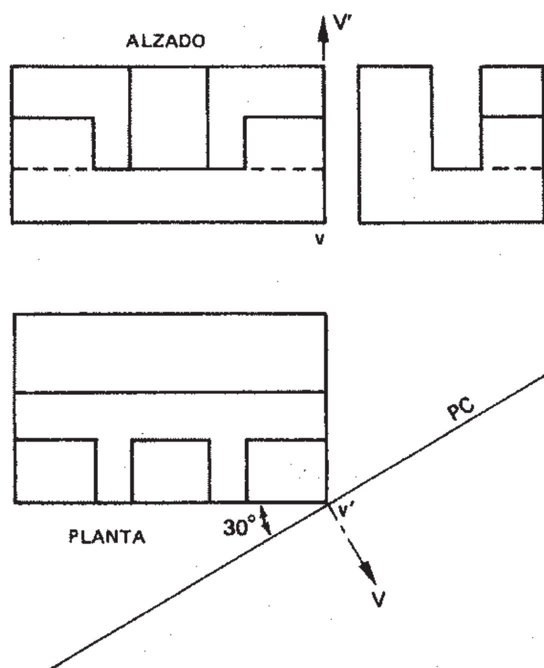
13. Dibujar en perspectiva cónica la figura definida por sus vistas. Datos: alejamiento del punto de vista vV = 80 mm, cota vv'=80 mm, ángulo = 30°; cotas en milímetros; escala 1:1.



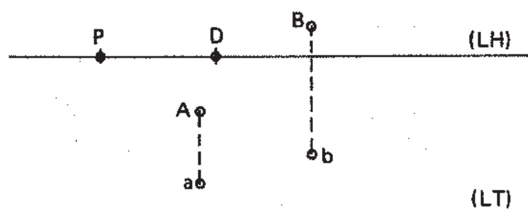
14. Dados los cuadrados A y B en perspectiva cónica oblicua, inscribir dos círculos en éstos según el sistema cónico.



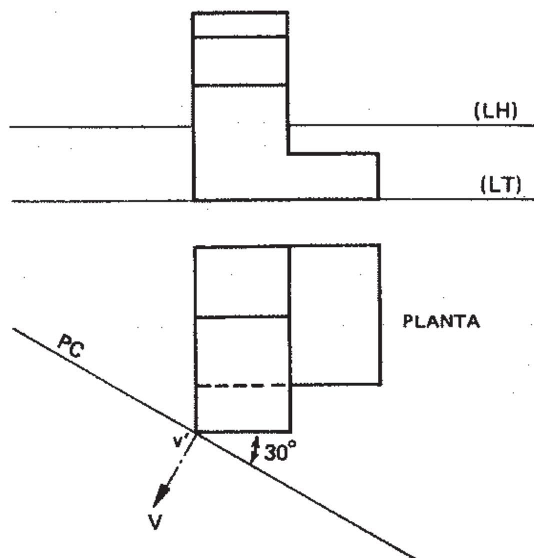
15. Dibujar en perspectiva cónica la figura definida por sus vistas; cotas en las mismas.
Datos: alejamiento del punto de vista v' V = 60 mm, cota vv'= 40 mm, ángulo = 30° y escala E = 2:1.



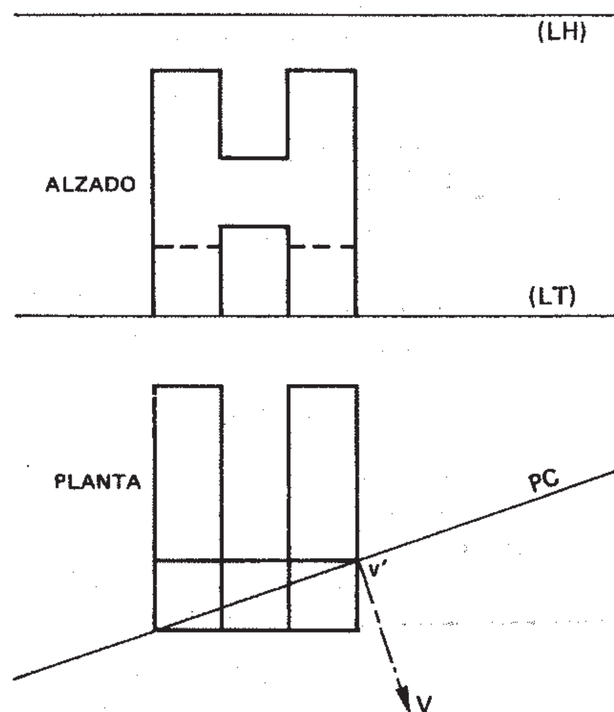
16. Determinar la verdadera magnitud del segmento AB, del que se conocen las proyecciones cónicas de sus extremos.



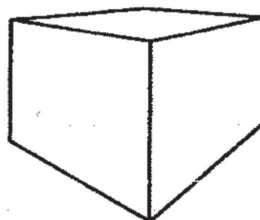
17. Dibujar en perspectiva cónica la figura definida por sus vistas. Datos, vV = 60 mm; escala 2 : 1.



18. Dibujar en perspectiva cónica la figura definida. Datos. vV = 80 mm; escala 2:1.



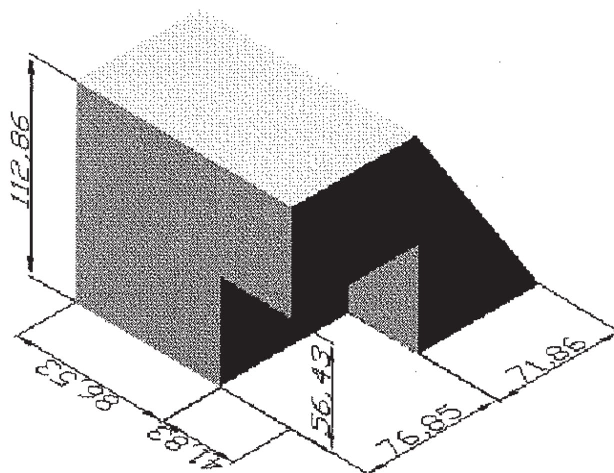
19. Hallar en verdadera magnitud la longitud de la diagonal del cubo dado en perspectiva y situada sobre el suelo.



LT

TEMA 17

NORMALIZACIÓN Y ACOTACIÓN



1. NORMAS

Hay una serie de trabajos destinados a unificar criterios, dimensiones, notaciones, etc., con el fin de racionalizar la producción y crear una simbología comprensible por todos. Esto queda reflejado en las normas que van dictando organismos nacionales o internacionales. Algunas son de obligatorio cumplimiento, y otras son recomendaciones.

Las ventajas que la normalización conlleva son, entre otras: menor costo de fabricación, facilidad de repuesto, intercambiabilidad, fabricación en serie, mayor calidad, etc.

En cada país hay un conjunto de normas. Las más importantes son:

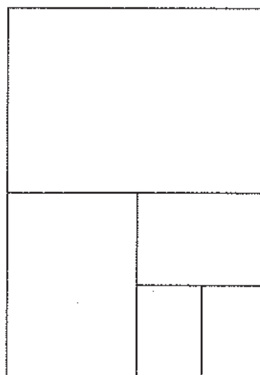
Alemania: DIN (Deutsche Industrie Normen).
España: UNE (Una Norma Española).
EEUU: ASA (American Standard Association).
Internacional: ISO (International Organization for Standardization).

En España, las normas UNE están clasificadas en 58 apartados numerados. Por ejemplo: 1 Asuntos generales. 2 Nomenclatura. 42 Arquitectura. Las normas se designan por un número en el cual las dos primeras cifras indican el apartado y las tres siguientes son el número propio de la norma. Por ejemplo: 42015.

2. NORMAS UNE SOBRE LOS FORMATOS DE PAPEL EN DIBUJO TÉCNICO

Se parte de un formato de dimensiones a y $a\sqrt{2}$ y un área de 1 m^2, que es el tamaño A0: 0'841 x 1'189 m.

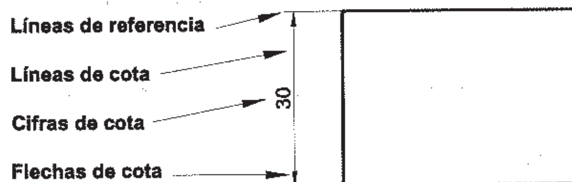
Dividiendo el lado mayor en dos partes iguales, sale otro formato con la misma proporción de lados y la mitad de área, el A1: 0'594 x 0841 m. Dividiendo sucesivamente el lado mayor, salen el resto de los formatos:



A0: 0'841 x 1'189 m
A1: 0'594 x 0'841 m
A2: 0'420 x 0'594 m
A3: 0'297 x 0'420 m
A4: 0'210 x 0'297 m
A5: 0'148 x 0'210 m
A6: 0'105 x 0'148 m

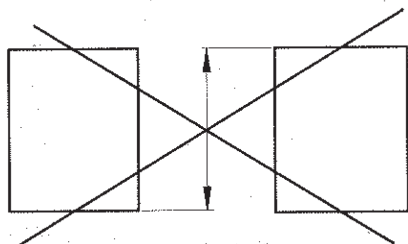
3. NORMAS SOBRE ACOTACIÓN

Una pieza está perfectamente acotada cuando tiene el número suficiente de cotas para su determinación geométrica. Cada dimensión debe acotarse una sola vez. Se utilizan los siguientes elementos:

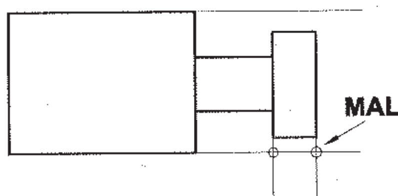


Líneas de referencia

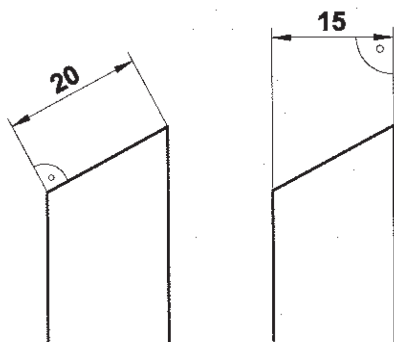
- Son de trazo continuo y fino.
- Deben sobrepasar las líneas de cota en 2 ó 3 mm.
- Deben salir de una sola vista.



- No se deben cortar entre sí.

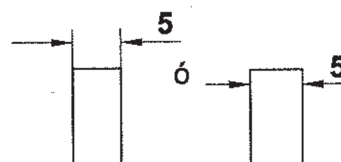


- Deben ser perpendiculares a la dimensión que acotan.

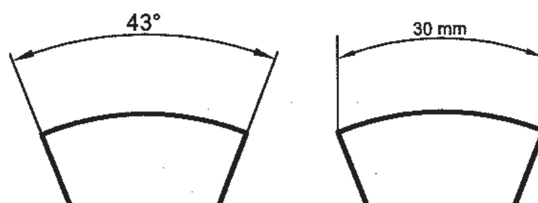


Líneas de cotas

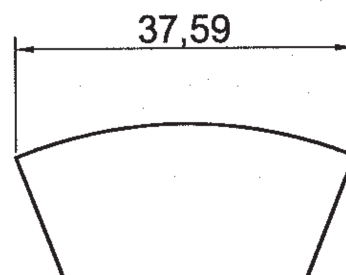
- Deben ser paralelos a la dimensión que acotan y exteriores a la vista, si es posible.
- La separación será proporcional al dibujo pero a una distancia de la vista de al menos 8 mm, y de 5 mm entre sí.
- Deben ser de trazo continuo y fino, sin utilizar ejes ni aristas como líneas de cotas.
- No se deben hacer en prolongación de las aristas.
- Si no hay espacio suficiente, se hace:



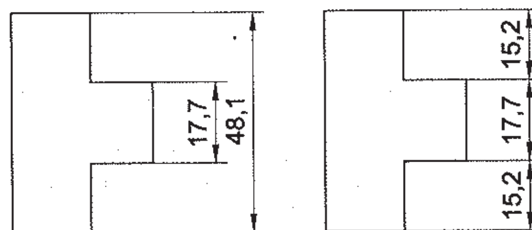
- Al acotar un arco o un ángulo, es un arco concéntrico:



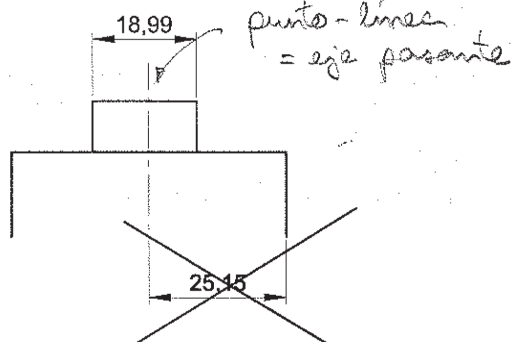
- Si lo que se acota es la cuerda:



- No deben cortarse las líneas de cota entre sí ni con las de referencia. Por ello las líneas de cota más largas deben ir más alejadas de la figura que las cortas, o acotar en prolongación.



• Si hay eje de simetría, no se acota respecto a él, sino entre puntos simétricos.



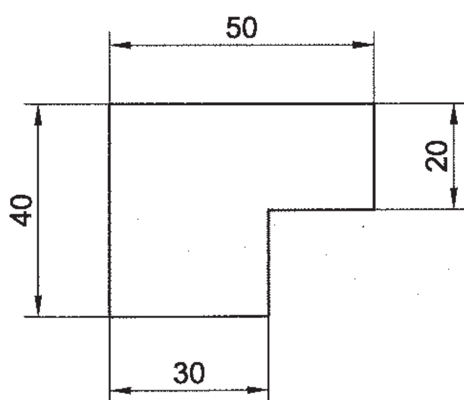
Flechas de cota

• Formará un ángulo en el vértice de 15°. En la práctica, esto significa que deben ser estrechas.



Cifras de cota

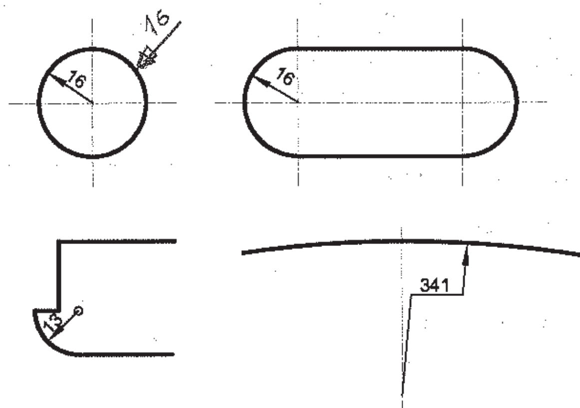
• Se pondrá sobre la línea de cota, en la misma dirección que ella, de izquierda a derecha y de abajo a arriba.



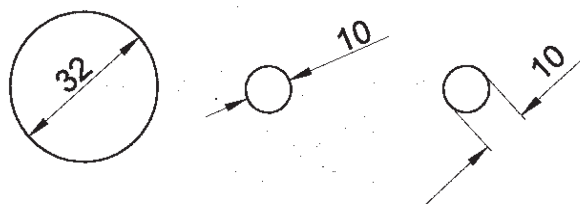
• Señalarán la verdadera dimensión, aunque el dibujo esté a escala.
• Se pondrán centrados, sin cortar a otras líneas.
• En dibujo mecánico, la unidad será el milímetro. En construcción, el centímetro o el metro.

Acotación de radios y diámetros

Los radios se acotan con una línea de cota con una sola flecha. Para señalar el centro:

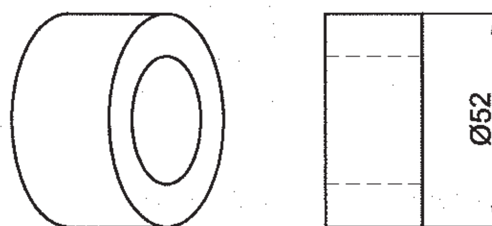


Los diámetros se acotan interiormente si hay espacio, y si no, exteriormente. La línea de cota se debe poner inclinada.

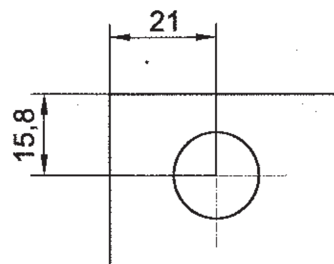


Los arcos mayores de 180° se acotarán por su diámetro.

Si se acota una dimensión circular que no aparece en la proyección como tal, se debe anteponer a la cifra de cota el símbolo Ø.



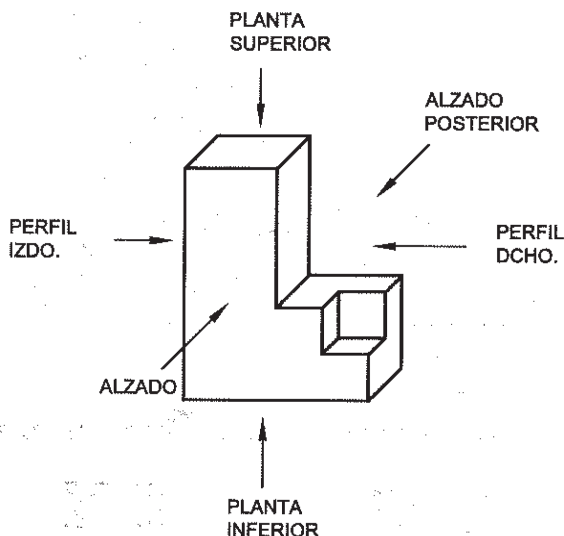
Las cotas de posición de taladros y elementos con eje se referirán a dicho eje y no a los contornos.



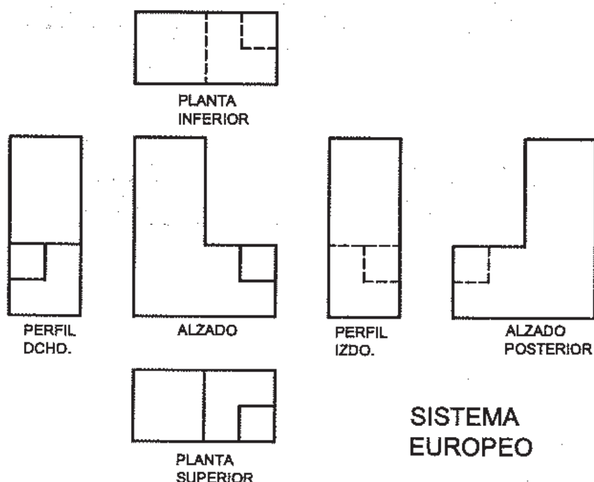
4. REPRESENTACIÓN NORMALIZADA DE UN OBJETO POR SUS VISTAS

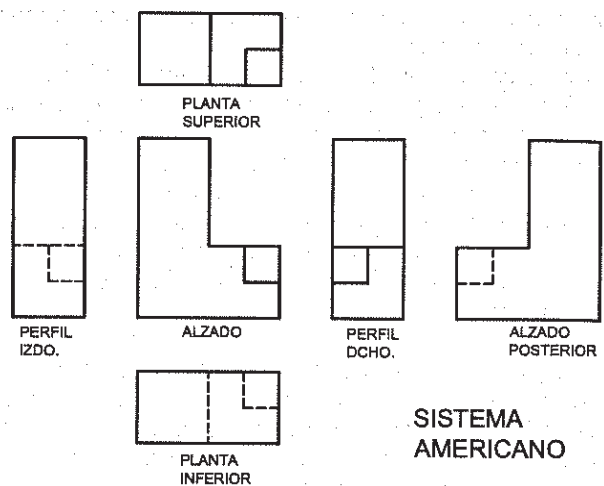
Todo objeto puede ser representado por sus proyecciones sobre seis planos perpendiculares. Las proyecciones obtenidas se llaman *vistas* del sólido.

La colocación de las vistas de una figura se hace siempre alrededor del alzado, a unas distancias similares unas de otras, y coincidiendo las aristas y puntos según rectas verticales y horizontales.



Hay dos sistemas en la colocación de estas vistas: el europeo y el americano. En el europeo, el perfil derecho se sitúa a la izquierda del alzado; la planta superior, debajo de él, etc. En el sistema americano, el perfil derecho va a la derecha del alzado; la planta superior, encima de él, etc.



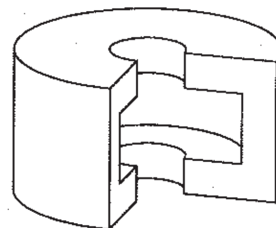


Si no se especifica lo contrario, usaremos el sistema europeo y sólo tres vistas: el alzado, la planta superior y un perfil, el que represente mejor al cuerpo.

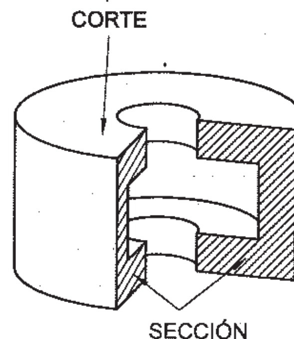
5. SECCIONES Y CORTES

Al representar un objeto, hay que dar la información necesaria para que esté totalmente definida, pero sin dar la misma información dos veces. Por eso, aunque en general tres vistas representan un objeto, si con dos queda definido, no se debe dar la tercera vista. Y si por su simetría queda definida con una sola vista, no se deben dar dos.

En esos casos y en otros en los que hay detalles interiores, para que la figura quede correctamente definida se recurre a dibujarla seccionada de manera que quede al descubierto la parte interna del objeto.

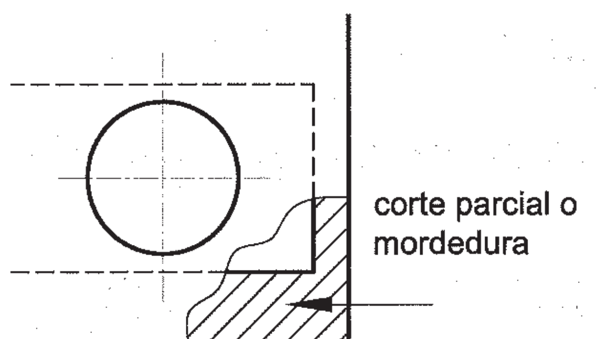


Cuando un cuerpo es cortado por un plano, se separan las dos partes resultantes, y se representa una de ellas. La zona del material que es cortada por el plano se llama sección, y se representa con un rayado a 45°. Por tanto **sección** es la superficie de contacto entre la pieza y el plano secante, mientras que un **corte** representa la sección y la parte del cuerpo situada detrás del plano secante.



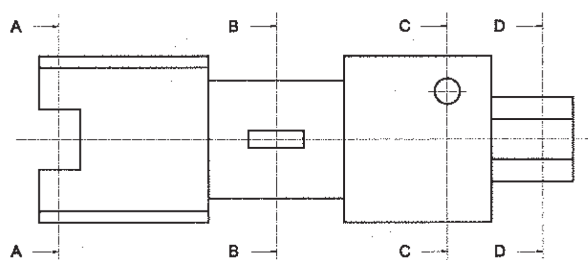
Se puede elegir un único plano de corte, varios planos sucesivos, dos planos concurrentes en un eje, corte a un cuarto (también llamado medio corte o semicorte), etc. La posición de esos planos secantes se indica en una de las vistas distintas a las del corte, por ejemplo en la planta. Se indica con una línea fina de trazo y punto, gruesa en los extremos y en los cambios de dirección. El sentido de observación del corte se indica con dos flechas, junto con dos letras que indican el plano de corte. Si hay varios planos de corte, se pone A-A; B-B; etc. Y en la vista que representa al corte se añade A-A.

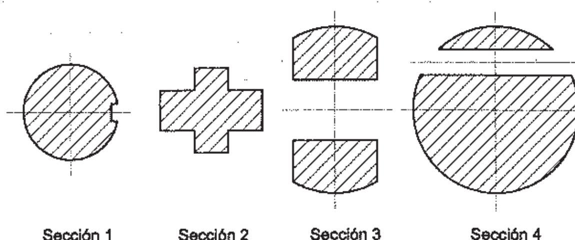
En algunos casos, sólo necesitamos representar pequeños detalles interiores de una pieza. En estos casos no será necesario un corte total o al cuarto, y será suficiente con un corte parcial o mordedura. El corte se delimitará mediante una línea fina y ligeramente sinuosa.



EJERCICIO RESUELTO 1

Rerlacionar las secciones representadas con los cortes indicados en la figura, rellenando la tabla que se adjunta.

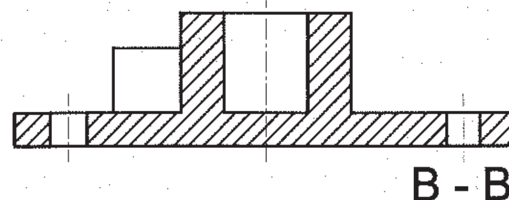


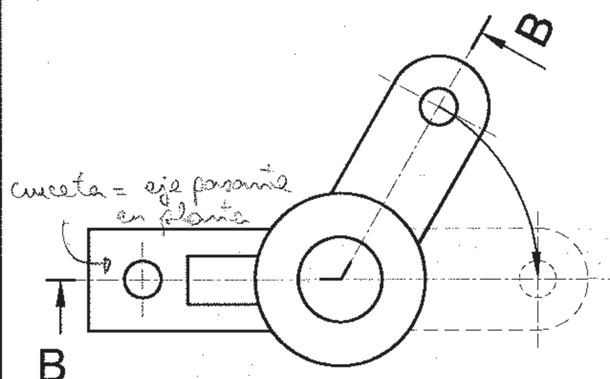


Corte	Sección (indicar el nº)
A-A	3
B-B	1
C-C	4
D-D	2

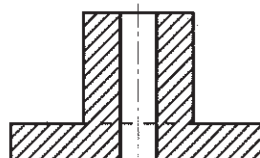
6. ALGUNAS SIMPLIFICACIONES

- Si el corte es por dos planos concurrentes, la sección se gira:

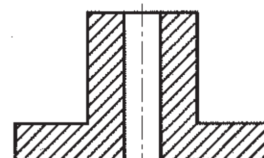




- En la vista seccionada no se dibujan líneas discontinuas:

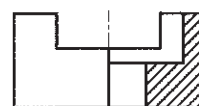


MAL

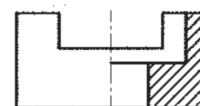


BIEN

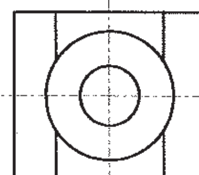
- En la sección a un cuarto se representa la pieza con una parte seccionada y con la otra no, separada por una línea fina de punto y trazo. En ninguna de las dos zonas se ponen líneas ocultas. Además, en planta no se indica el plano de corte.

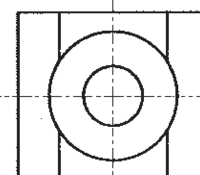


MAL

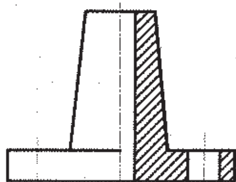


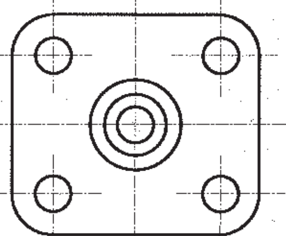
BIEN





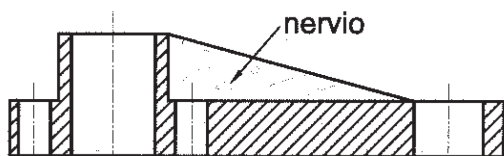
- En las piezas simétricas o de revolución en las que haya fuera del plano de corte detalles iguales regularmente repartidos (agujeros, nervios de refuerzo, etc), se permite girarlos y ponerlos en el plano de corte. Por ejemplo, los agujeros pasantes de esta pieza cortada a un cuarto:

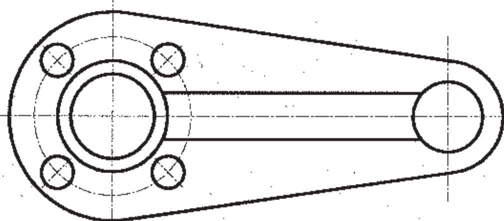




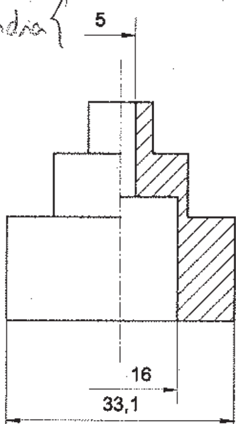


- Los nervios de refuerzo, aunque estén cortados, no se representa su sección.





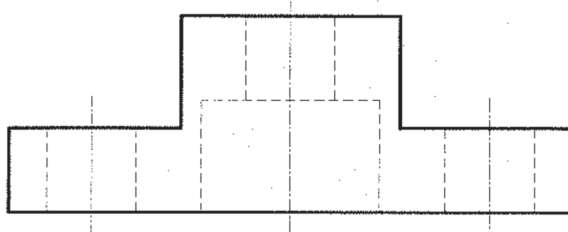
Cotas perdidas o parciales: cuando se acotan medidas simétricas, se puede poner: DIAMETROS

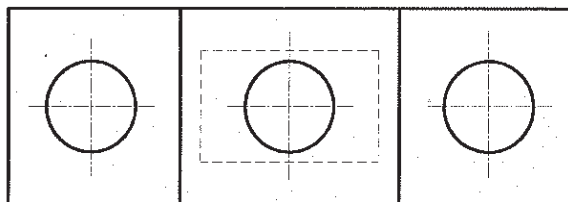


1º círculos

EJERCICIO RESUELTO 2

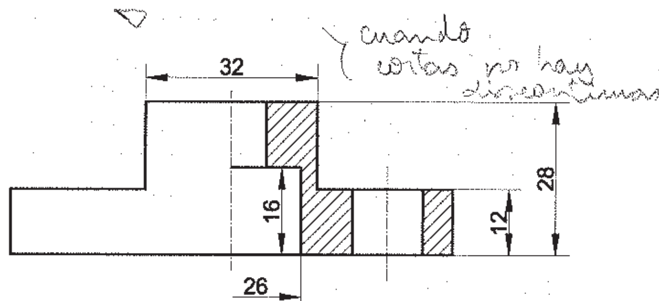
Acotar la pieza representada, realizando en las propias vistas los cortes que se consideren necesarios.

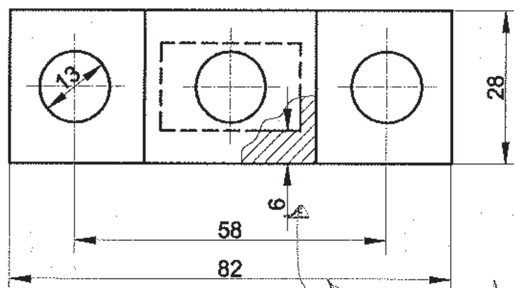




Hacemos un corte a un cuarto. También damos una mordedura en la planta, para aclarar el interior y poder acotar ahí el espesor. Por último son necesarias 10 cotas para definir tatalmente la figura.

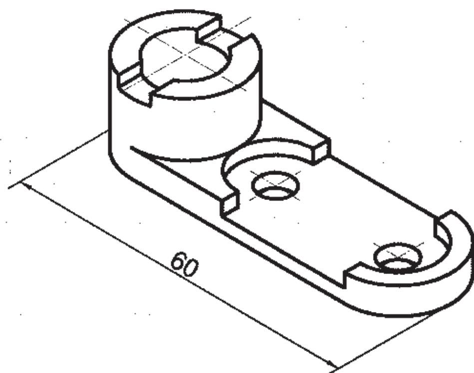
es simétrica ⇒ alzado-sección





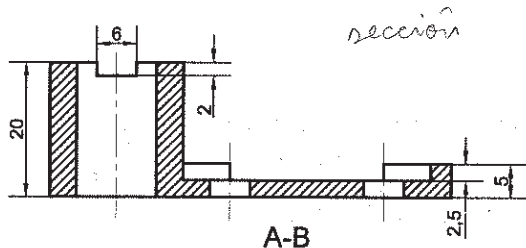
EJERCICIO RESUELTO 3

Representar y acotar en diédrico la pieza adjunta, dando las vistas, cortes y/o secciones que se consideren necesarios. Los agujeros son pasantes.

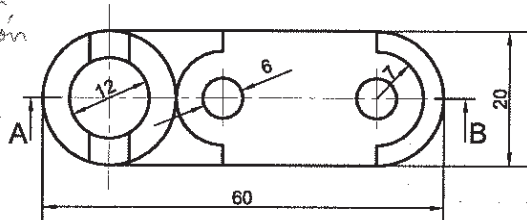


Hacemos un corte por el plano de simetría. Para obtener las medidas reales de la perspectiva, se comprueba con la medida de 60 mm, que sí hay coeficiente de reducción de 0.8. Con nueve cotas queda definida la pieza.

sección

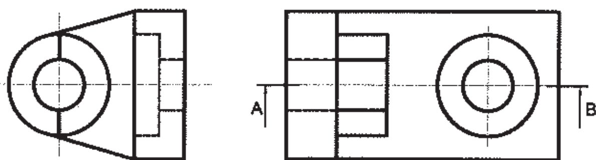


se indica la sección del corte

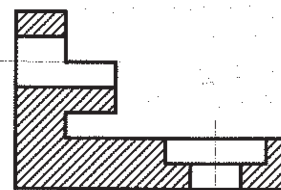


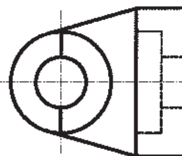
EJERCICIO RESUELTO 4

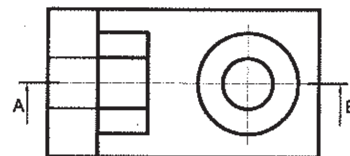
Representar el corte AB de la pieza en la posición que le corresponda.



La posición que le corresponde es en la parte superior, según indican las flechas del corte, alineada con la planta.
Para obtener la forma del corte, puede ser útil hacer un croquis de la pieza.

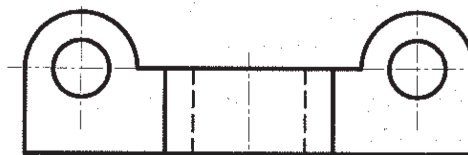


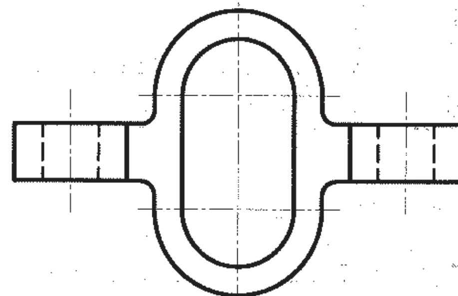




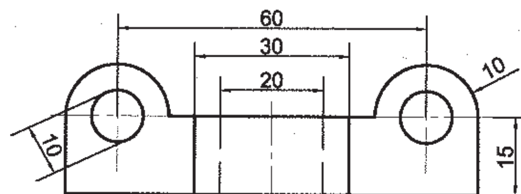
EJERCICIO RESUELTO 5

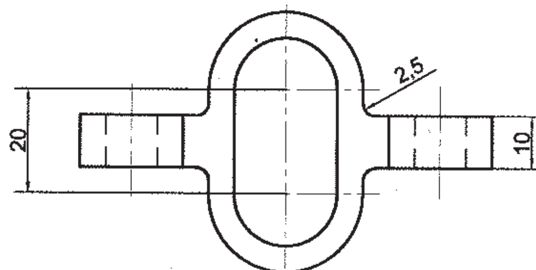
Acotar según normas la pieza representada por sus vistas diédricas, añadiendo los cortes y/o secciones que se consideren necesarios.





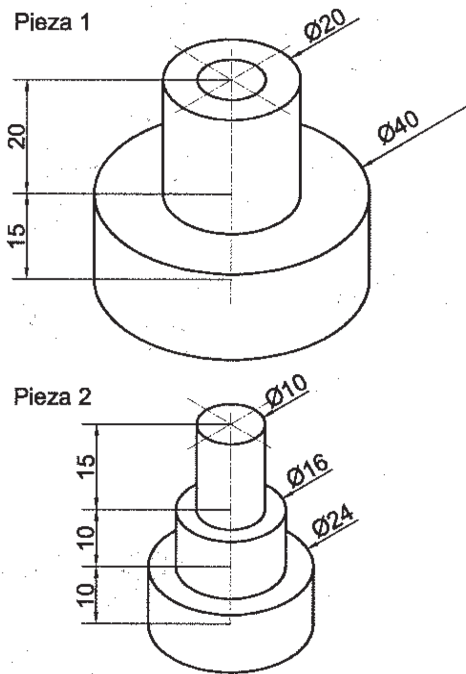
En este caso, no es necesario hacer ningún corte ni sección, pues la pieza es clara. Solamente hay que definirla dimensionalmente, y con 9 cotas bien escogidas es suficiente, por ejemplo:



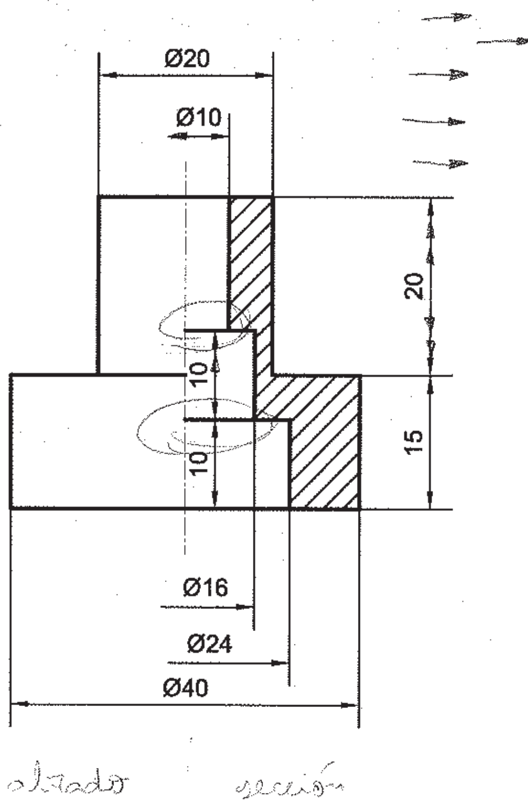


EJERCICIO RESUELTO 6

La pieza 1, representada en el dibujo isométrico, tiene en su interior un hueco que se ajusta a la pieza 2. Representar el alzado de la pieza 1 con un corte a 90°. Acotar según normas.

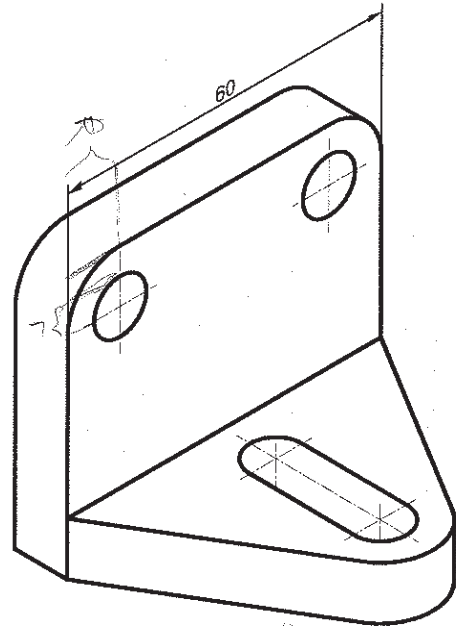


La parte exterior del alzado viene dado por la pieza 1, mientras que el interior lo delimita la pieza 2. Para acotar, usamos algunas cotas perdidas o parciales.

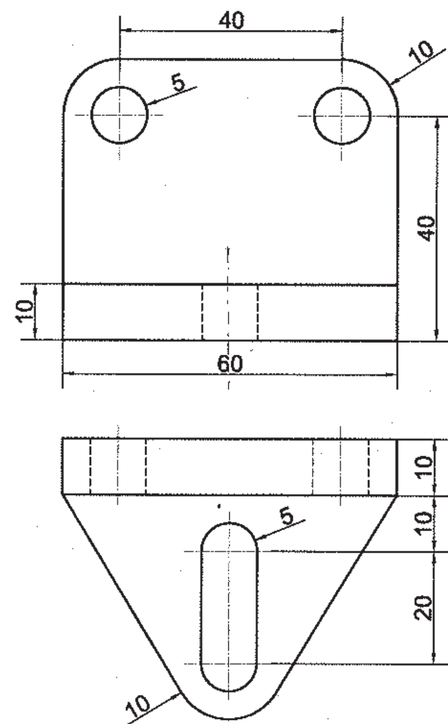


EJERCICIO RESUELTO 7

Representar y acotar en diédrico la pieza adjunta, dada en perspectiva isométrica, dando las vistas, cortes y/o secciones que se consideren necesarias.



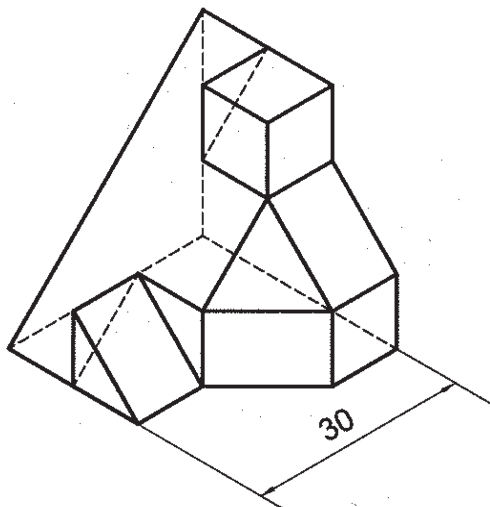
Representamos el alzado y la planta superior, sin ninguna sección, pues no es necesaria. Para la total definición dimensional, son necesarias 11 cotas. Obsérvese que los detalles repetidos (p. ej. los dos agujeros pasantes en el alzado) sólo se acotan una vez.



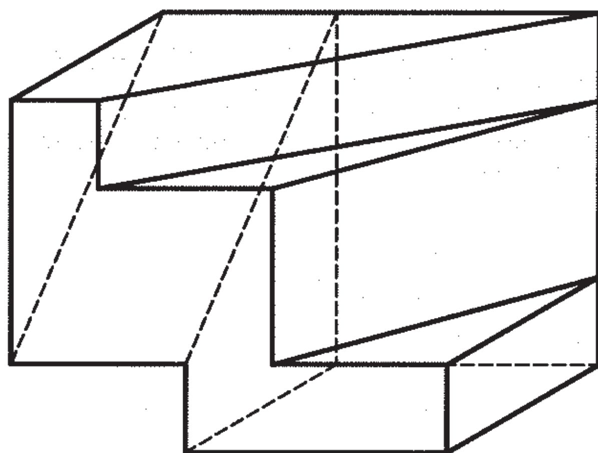
EJERCICIOS PROPUESTOS

Representar y acotar según normas, a escala E= 1:1, las tres vistas principales de las siguientes piezas:

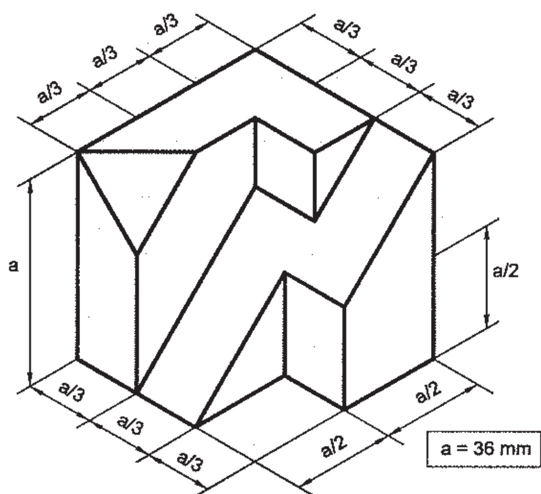
1.



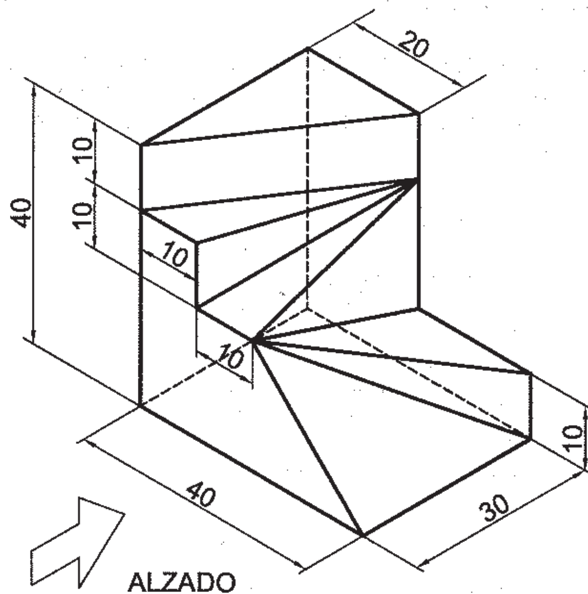
2.



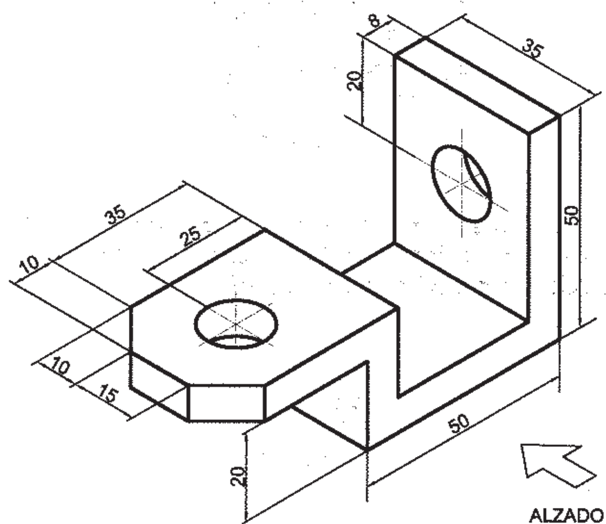
3.



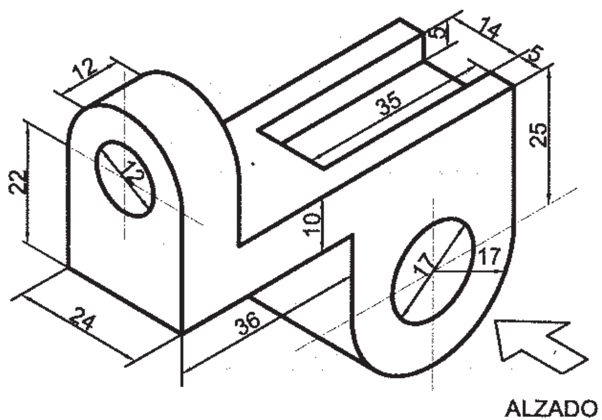
4.



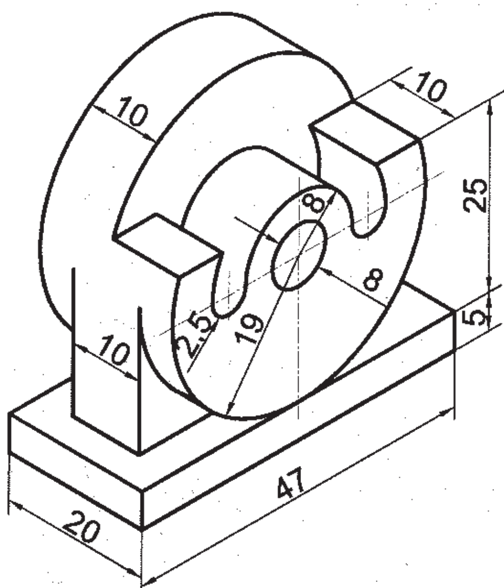
5.



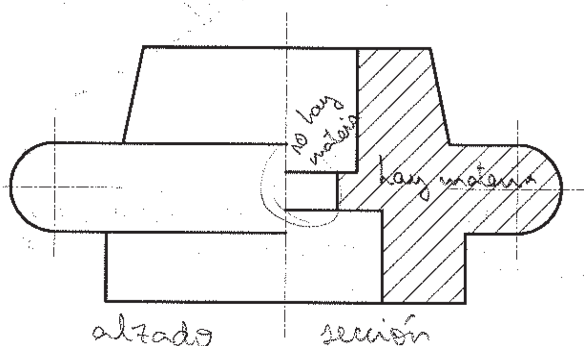
6.



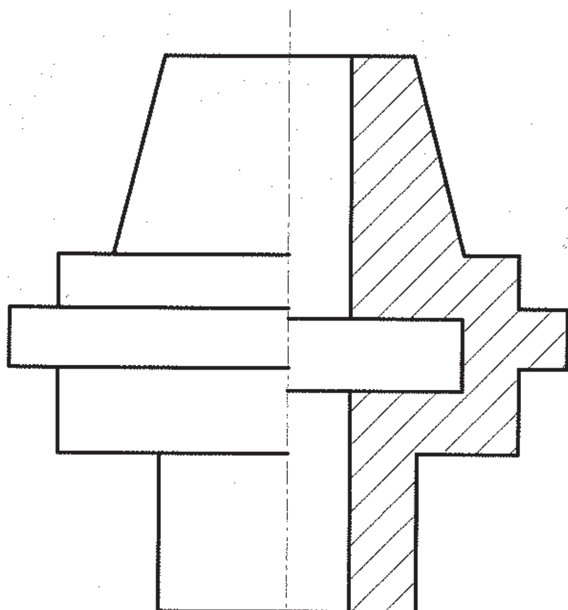
7.



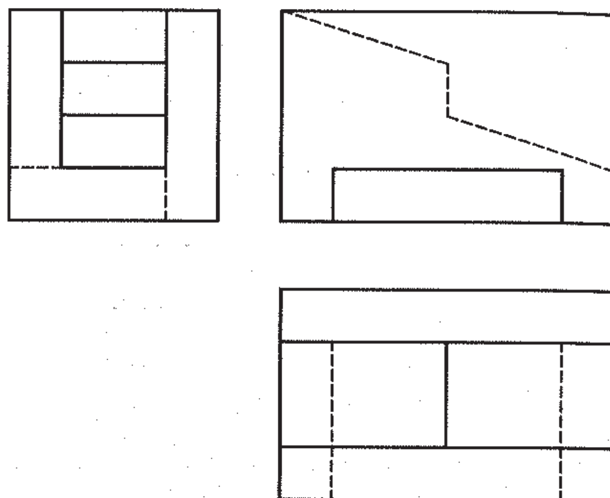
8. Acotar, según normas, la pieza de revolución que aquí se representa, para su correcta definición dimensional.

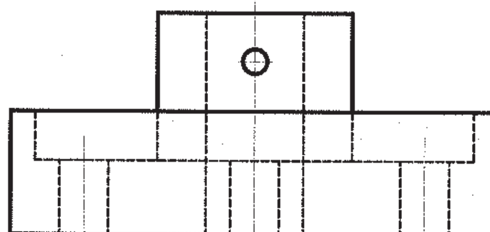


9. Acotar, según normas, la pieza de revolución que aquí se representa, para su correcta definición dimensional.

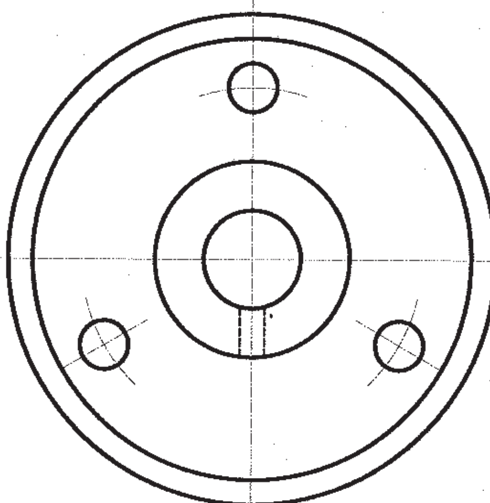


10. Acotar dimensionalmente la pieza representada definiendo sobre el propio dibujo los cortes y/o secciones que se consideren necesarios.

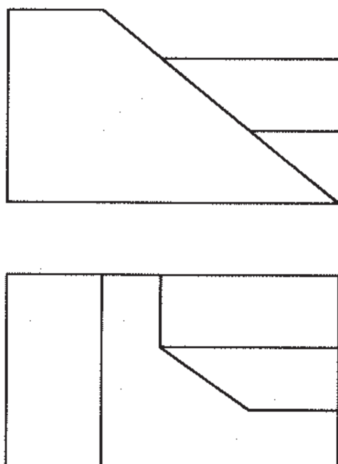


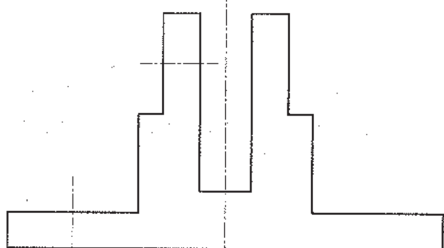


11. Sustituir la vista menos significativa de la representación adjunta por otra más adecuado que incluya los cortes y/o secciones que se consideren oportunos.

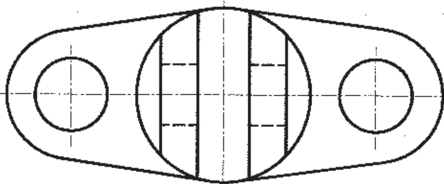


12. Completar la representación diédrica con la vista lateral derecha.

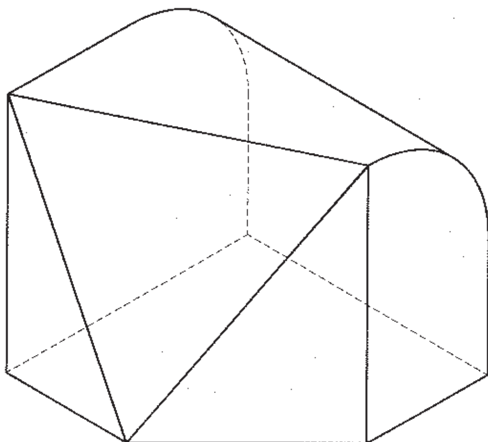




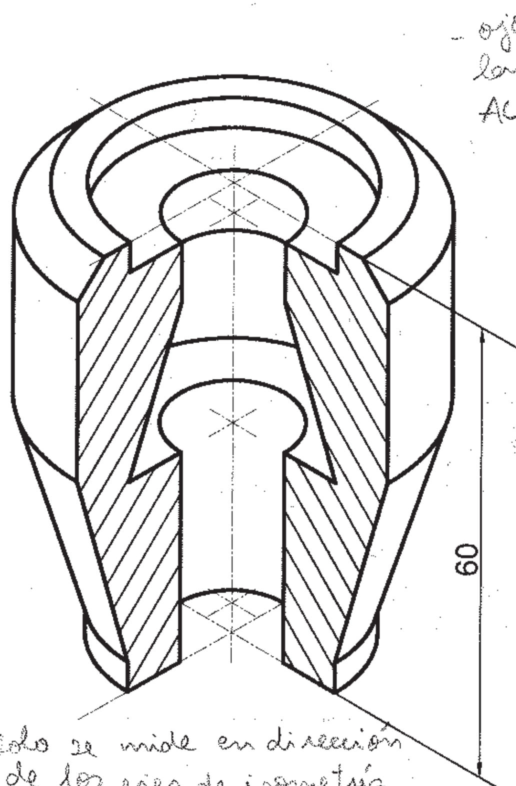
13. Completar el alzado de la pieza dada, teniendo en cuenta que se debe delinear la mitad en proyección y la otra mitad en corte. Acotar el objeto sin especificar el valor de las dimensiones. Todos los taladros son pasantes.



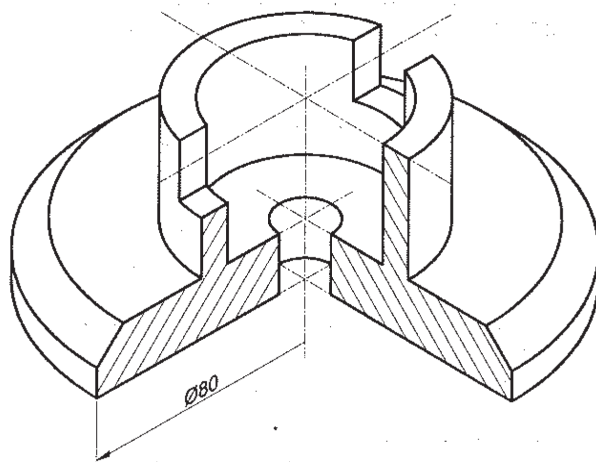
14. Representar en sistema diédrico, con las vistas que se consideren necesarias, la pieza adjunta dada en isométrica.



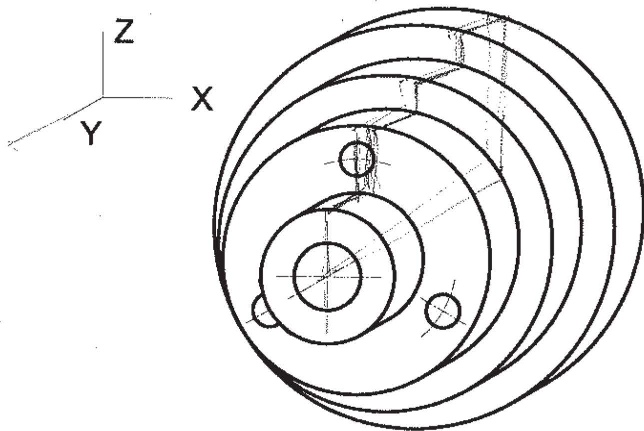
15. Representar en diédrico la pieza dada en perspectiva isométrica, mediante vistas, cortes y/o secciones que se consideren necesarios.



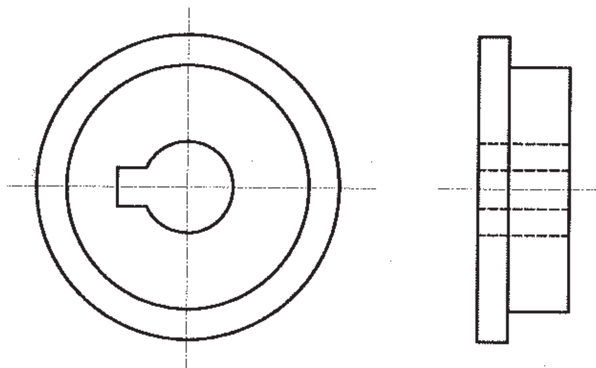
16. Representar en diédrico la pieza dada en perspectiva isométrica, mediante vistas, cortes y/o secciones que se consideren necesarias.



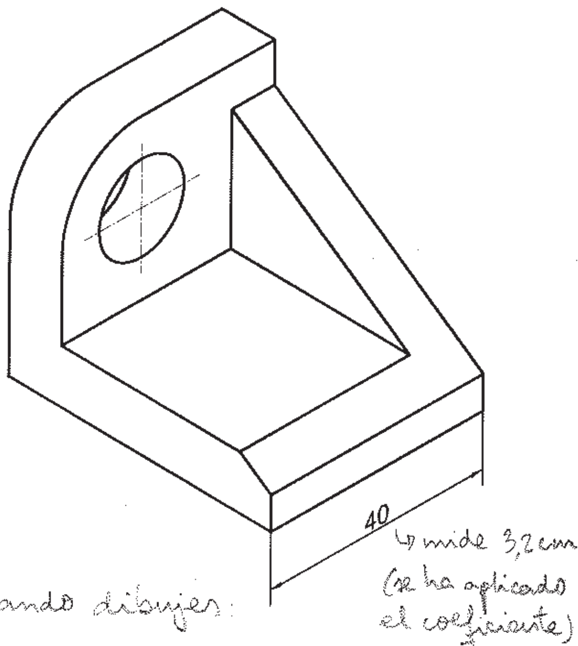
17. Representar y acotar en diédrico, a escala E=1:1, la pieza adjunta, dando las vistas, cortes y/o secciones que se consideren necesarios. Los cuatro agujeros son pasantes, Cy=1 y el diámetro mayor es de 60 mm.



18. Representar, según normas, una tercera vista, con sección por su plano de simetría.



19. Representar y acotar en diédrico la pieza adjunta, dando las vistas, cortes y/o secciones que se consideren necesarias .

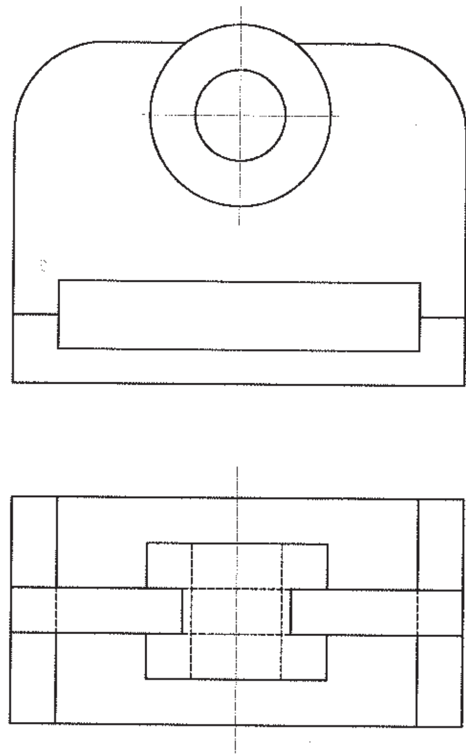


↳ mide 3,2 cm (se ha aplicado el coeficiente)

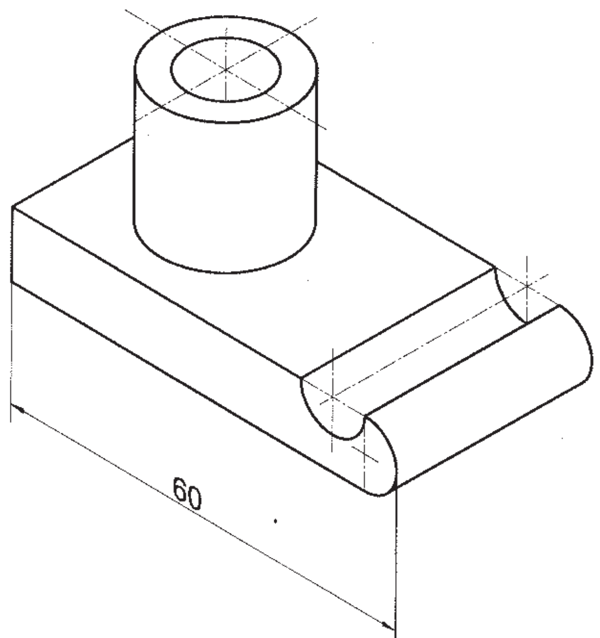
Cuando dibujes:

4 cm

20. Acotar según normas la pieza representada.



21. Representar en diédrico la pieza dada en sibujo isométrico, dando los cortes y/o secciones que se consideren necesarios, y acotar las vistas para su definición dimensional.

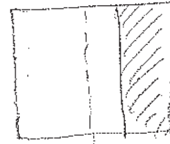


Tipos de piezas:

A) Revolución → se definen con sección - alzado

ej:





B) En forma "L" → planta - alzado

ej. ej. res. 7
ej. res. 3

Acotar → mínimo n de cotas